دراسة لصيغ واستقرارية الحل
لبعض المعادلات التفاضلية الكسرية

رسالة مقدمة من قبل

صهيب طلال حسن الرمضاني

إلى

مجلس كلية التربية في جامعة الموصل
وهي متطلب جزئي لنيل درجة الماجستير في علوم

الرياضيات

بإشراف
الأستاذ المساعد الدكتور

جوزيف غانم عبد الأحد

١٤٢٧هـ ٢٠٠٦م

بسم الله الرحمن الرحيم

﴿ الذين يذكرون الله قياماً وقعوداً وعلى جنوبهم
ويتفكرون في خلق السماوات والأرض ربنا ما
خلقت هذا باطلاً سبحانك فقِنا عذاب النار ۞ ﴾

صدق الله العظيم

إقرار المشرف

أشهد بأن إعداد هذه الرسالة جرى تحت إشرافي في جامعة الموصل ، وهي جزء من متطلبات نيل درجة الماجستير في علوم الرياضيات .

التوقيع :

المشرف : أ. م. د. جوزيف غانم عبد الأحد

التاريخ : / / ٢٠٠

إقرار المقوم اللغوي

أشهد بأن هذه الرسالة الموسومة " **دراسة لصيغ واستقرارية الحل لبعض المعادلات التفاضلية الكسرية** " تمت مراجعتها من الناحية اللغوية وتصحيح ما ورد فيها من أخطاء لغوية وتعبيرية وبذلك أصبحت الرسالة مؤهلة للمناقشة بقدر تعلق الأمر بسلامة الأسلوب وصحة التعبير .

التوقيع :

المقوم اللغوي : محمد عادل محمد

التاريخ : / / ٢٠٠

إقرار رئيس لجنة الدراسات العليا

بناءاً على التوصيات المقدمة من قبل المشرف والمقوم اللغوي أرشح هذه الرسالة للمناقشة .

التوقيع :

الدكتور : أ. م. د. جوزيف غانم عبد الأحد

التاريخ : / / ٢٠٠

إقرار رئيس القسم

يناءاً على التوصيات المقدمة من قبل المشرف والمقوم اللغوي ورئيس لجنة الدراسات العليا أرشح هذه الرسالة للمناقشة .

التوقيع :

الدكتور : أ. م. د. رعد نوري بطرس

التاريخ : / / ٢٠٠

إقرار لجنة المناقشة

نشهد بأننا أعضاء لجنة المناقشة ، اطلعنا على الرسالة الموسومة بـ **" دراسة لصيغ واستقرارية الحل لبعض المعادلات التفاضلية الكسرية "** وقد ناقشنا الطالب في محتوياتها وفيما له علاقة بها بتاريخ ١/٢/ ٢٠٠٦ وأنها جديرة لنيل شهادة الماجستير في الرياضيات .

توقيع
رئيساً
أ. م. د. رعد نوري بطرس
كلية التربية /جامعة الموصل

توقيع
عضواً
أ. م. د. محمد شامي حسو
كلية التربية / جامعة الموصل

توقيع
عضواً
د. حسن حسين إبراهيم
كلية العلوم / جامعة تكريت

توقيع
عضواً ومشرفاً
أ. م. د. جوزيف غانم عبد الأحد
كلية التربية / جامعة الموصل

قرار مجلس الكلية

إجتمع مجلس كلية التربية بجلسته ....المنعقدة بتاريخ / / ٢٠٠٦ وقرر :

توقيع
مقرر مجلس الكلية
أ. د. مزاحم قاسم الملاح

توقيع
عميد الكلية
أ. د. عبد الواحد ذنون طه

المحتويات

شكر وتقدير

الحمد لله أولاً وآخراً .

أتقدم بوافر الشكر والتقدير إلى الدكتور جوزيف غانم عبد الأحد لإشرافه على هذه الرسالة، وأتمنى له دوام الموفقية في مسيرته العلمية والعملية .

كما أتقدم بالشكر إلى رئاسة قسم الرياضيات في كلية التربية وإلى كافة التدريسيين المنتسبين إليه .

كما لا أنسى وفائي وامتناني لوالديّ العزيزين ولجميع أسرتي على دعمهم المستمر وتشجيعهم لي في حياتي العلمية والعملية .

لذا أتقدم لهم بجزيل الشكر والثناء .

الباحث

الملخص

تناولنا في هذه الرسالة دراسة لصيغ حل المعادلات التفاضلية الكسرية الخطية بمعاملات ثابتة ، بنوعيها المتجانسة وغير المتجانسة ، ثم تطرقنا لصيغة حل منظومة معادلات تفاضلية كسرية خطية بمعاملات ثابتة.

تناولت الرسالة أيضاً دراسة سلوك حلول المعادلات التفاضلية الكسرية الخطية المتجانسة بمعاملات ثابتة اعتماداً على الصيغ المستحصلة ، كما تناولت دراسة استقرارية بعض المعادلات التفاضلية الكسرية الخطية بمعاملات متغيرة فضلاً عن المعادلات التفاضلية الكسرية غير الخطية بعد تقريبهما إلى معادلات تفاضلية كسرية خطية بمعاملات ثابتة .

الفصل الأول

المقدمة

البند الأول : نبذة تأريخية :

إن العديد من النماذج الرياضياتية التي تصف الكثير من الظواهر الطبيعية في الفيزياء والهندسة وغيرها تكون معادلات تفاضلية أو تكاملية أو تكاملية- تفاضلية ومن رتب كسرية، وهناك العديد من الدراسات حول هذا الموضوع أنظر مثلا [Mainardi 1997] ، [Scalas2000] ،[Berlowitz 2002] ،[Logvinova 2004] ،[Meerschaert 2006] .

ولحساب حلول هذه المعادلات سواءً بالطرق التحليلية أو بالطرق العددية لابد من تحديد بعض الشروط الابتدائية للحل ، والتي تستحصل من أنواع مختلفة من طرائق القياس التجريبية والعملية.

إن هذه الطرائق لا تخلو من أخطاء ناتجة عن قياس النتائج التجريبية أو إجراء الحسابات عليها، وإن أي تشويش (Disturbance) مهما كان صغيراً في الشروط الابتدائية يؤدي إلى تغيير في سلوك حل المعادلة ، وقد يكون هذا التغيير جوهريا إلى الحد الذي يجعل الحل لا يصف الظاهرة ولا حتى وصفاً تقريبياً.

لذلك فإن دراسة الشروط التي لا تسمح للحلول بأن تغير من السلوك المرغوب فيه مع تغير الشروط الابتدائية تكون بالغة الأهمية عند دراسة التطبيقات العملية للمعادلات التفاضلية أو التكاملية أو التكاملية - التفاضلية ، ومن المعلوم أن المجال الرياضياتي الذي يهتم بهذا الموضوع يرجع غالباً إلى ما يسمى بنظرية الاستقرارية (Stability theory) .

وهكذا فإن العديد من الدراسات تناولت المعادلات التفاضلية الكسرية وعلى وجه الخصوص المعادلات التفاضلية الكسرية الخطية.أنظر على سبيل المثال [Bassam 1965],[Diethelm 2001],[Diethelm 2003].

لقد درس [مرجان ١٩٨٩] المعادلة التفاضلية الكسرية الخطية ذات المعاملات المتغيرة بالصيغة :

$$\sum_{i=0}^{n} p_i(x)y^{(n-i)\alpha} = f(x) \qquad 0 \le \alpha \le 1$$

مع الشروط الابتدائية

$$y^{(i\alpha-1)}(a) = C_i$$

حيث $p_i(x)$ دوال مستمرة ، وبرهن بعض المبرهنات المتعلقة بوجود ووحدانية الحل.
كما أعطى [Barrett 1954] صيغة حل المعادلة التفاضلية الكسرية الخطية التالية :

$$y^{\alpha} + \lambda y = h(x) \qquad , \quad a < x \le b$$

مع الشرط الأبتدائي

$$y^{\alpha-i}C_i y = C_i$$

وتوصل [Loverro 2004] إلى نفس الصيغة باستخدام تحويلات لابلاس.
إن العملين الأخيرين وأعمال أخرى مشابهة تظهر جميعها العلاقة الوثيقة بين صيغ حل المعادلات التفاضلية الكسرية الخطية ذات المعاملات الثابتة مع الدالة المعروفة بدالة [Mittag-Leffler].
وإن دراسات كثيرة تناولت دالة [Mittag - Leffler] ودرست سلوكها ، أنظر مثلاً [Corenflo 2002] , [Corenflo 2001] , [Corenflo 1994] لذا فإن هذه الدراسات تعطي المجال لدراسة سلوك حلول المعادلات التفاضلية الكسرية الخطية ذات المعاملات الثابتة.
وعلى صعيد آخر فقد اتجه باحثون آخرون إلى دراسة المعادلات التفاضلية الكسرية الخطية بعد تحويلها إلى منظومة من المعادلات التفاضلية الكسرية أنظر [Diethelm 2003].
إن دراسة منظومة المعادلات التفاضلية الكسرية تقتضي تطويراً لمفاهيم التفاضل والتكامل في الفضاءات الاتجاهية ، وإن العديد من التطبيقات في الطبيعة تقتضي تطوير هذه المفاهيم فضلاً عن المؤثرات التفاضلية الاتجاهية كالانحدار (gradiant) والتشتت (divergeace) والتدويم (curl) ، والتي تدخل في نمذجة معظم المسائل في الجريان والانتشار وغيرها أنظر [Hartley 1999] ، [Meeschaert 2004] [Meeschaert 2005 b] , [Meeschaert 2005 a] .

البند الثاني: تعاريف ومبرهنات

في هذا البند سوف نقدم بعض التعاريف والمبرهنات التي نحتاج اليها في عملنا .

تعريف 1.1 :
إذا كانت $\alpha > 0$ ، فإن دالة كاما ويرمز لها بالرمز Γ تعرف كالآتي

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty x^{\alpha-1} e^{-x} dx$$

ملاحظة (١) : إن دالة كاما موجودة لكل قيمة $\alpha > 0$

ويوسع تعريف دالة كاما عندما $\alpha < 0$ بالصيغة

$$\Gamma(\alpha) = \frac{\Gamma(\alpha+n)}{\prod_{i=o}^{n-1}(\alpha+i)} \quad , \quad n \in z^+ \ , -n < \alpha < -n+1$$

لذلك فإن دالة كاما غير معرفة عند الأعداد الصحيحة غير الموجبة فقط .

تعريف 1.2 :
إذا كان $\beta, \alpha > 0$ فتعرف دالة بيتا بالشكل

$$B(\alpha,\beta) = \int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1} dx$$

ملاحظة (2) : ويوسع تعريف دالة بيتا عندما α أو β سالبة بالصيغة

$$B(\alpha,\beta) = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}$$

لذلك فإن دالة بيتا معرفة على جميع الأعداد الحقيقية .

تعريف 1.3 :

إذا كانت $f \in L(a,b)$, $\alpha > 0$ يعرف التكامل من الرتبة α بالشكل

$${}_a^b I^\alpha f(t) = \int_a^b \frac{(b-t)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} f(t) dt$$

تعريف 1.4 :

إذا كانت $\alpha < 0$ وكان n أصغر عدد صحيح موجب بحيث أن $n+\alpha \geq 0$ نعرف التكامل من الرتبة α بالشكل

$$\overset{b}{\underset{a}{I}}{}^{\alpha} f(t) = \left[D_x^n \overset{x}{\underset{a}{I}}{}^{n+\alpha} f(t) \right]_{x=b}$$

حيث أن $D_x^n = \dfrac{d^n}{dx^n}$ ، بشرط أن تكون $D^n \overset{x}{\underset{a}{I}}{}^{\alpha} f(t)$ ومشتقاتها حتى الرتبة $(n-1)$ موجودة على الفترة $|x-a| < h$ حيث $h > 0$ وأن المشتقة من الرتبة (n) موجودة عند $x = b$.

تعريف 1.5 :

إذا كانت $\alpha > 0$ يعرف المؤثر التفاضلي من الرتبة α بالشكل

$$D_x^{\alpha} f(x) = \overset{x}{\underset{a}{I}}{}^{-\alpha} f(t)$$

مبرهنة 1.1 :

لتكن $0 < \alpha < 1$ فإن

١- إذا كانت $f \in L(a,b)$ فإن $I^{\alpha} f$ موجودة د. ت .

٢- إذا كانت f مستمرة فإن $I^{\alpha} f$ مستمرة .

مبرهنة 1.2 :

إذا كانت $\alpha > 1$ وكانت $f \in L([a,b])$ فإن $I^{\alpha} f$ مستمرة بصورة مطلقة .

مبرهنة 1.3 :

إذا كانت $-1 < \beta\ ,\ \alpha \in R\ ,\ x > a$ فإن

$$\overset{x}{\underset{a}{I}}{}^{\alpha} \frac{(t-a)^{\beta}}{\Gamma(\beta+1)} = \begin{cases} \dfrac{(x-a)^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha+\beta+1)} & , \alpha+\beta \neq -n \ , \ n \in N \\ 0 & , \alpha+\beta = -n \ , \ n \in N \end{cases}$$

سوف نستخدم الرموز التالية

$$f^{\alpha}(x) = \underset{a}{\overset{x}{I}}{}^{-\alpha} f = D^{\alpha} f(x)$$

$$f^{n(\alpha)} = D^{n(\alpha)} f = \overbrace{D^{\alpha} D^{\alpha} \ldots D^{\alpha}}^{\text{n من المرات}} f(x)$$

ملاحظة (٣) : ليس شرطا أن يتساوى المؤثران $D^{n\alpha}, D^{n(\alpha)}$ على دالة ما فحسب المبرهنة (1.3) نلاحظ أن :

$$D^{0.5} D^{0.5} x^{-0.5} = I^{-0.5} I^{-0.5} x^{-0.5} = I^{-0.5} 0 = 0$$

$$D^{1} x^{-0.5} = -1.5 x^{-1.5}$$

مبرهنة 1.4 :

لتكن $f \in L(a,b)$ ، $\beta > 0, \alpha > 0$ فإن المتطابقة

$$I^{\alpha} I^{\beta} f = I^{\alpha+\beta}$$

تتحقق

١- دائمـــاً إذا كانت $\alpha + \beta \geq 1$

٢- د . ت . إذا كانت $\alpha + \beta < 1$

مبرهنة 1.5 :

إذا كانت $\alpha > 0$ إذا كانت $f \in L(a,b)$ فإن المتطابقة

$$D^{\alpha} I^{\alpha} f = f$$

تتحقق د. ت . على الفترة $[a,b]$.

مبرهنة 1.6 :

إذا كانت $n \in z^{+}$ وأن $n - 1 < \alpha < n$

وكانت $I^{i-\alpha} f$ موجودة ومستمرة بصورة مطلقة على الفترة $[a,b]$ فإن

١- يوجد $C_i \in R$ ، بحيث أن $\underset{a}{\overset{a}{I}}{}^{i-\alpha} f = C_i$

٢- $I^{-\alpha} f$ موجودة د. ت. وأن $I^{-\alpha} f \in L([a,b])$

٣- تتحقق العلاقة
$$I^{\alpha}D^{\alpha}f = f - \sum_{i=1}^{n} C_i \frac{(x-a)^{\alpha-i}}{\Gamma(\alpha-i+1)}$$

د . ت . على الفترة $[a,b]$ إذا كانت $f \in L(a,b)$.
ودائمـــا على الفترة $[a,b]$ إذا كانت $f \in C([a,b])$.

مبرهنة 1.7 :

إذا كانت $\alpha > 0$ و λ عددا معقداً و $f \in L(a,b)$ فإن
المتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n I^{n\alpha} f$ متقاربة بصورة مطلقة وبانتظام د . ت . على الفترة [a,b] .

تعريف 1.6 :

لتكن
$$\bar{y}' = \bar{f}(x,\bar{y}) \qquad (*)$$

منظومة من المعادلات التفاضلية وليكن $\bar{y}(x,x_o,\bar{y})$ حلا للمعادلة (*) .
١) يقـال أن الحـل $\bar{y}(x,x_o,\bar{y})$ مستقر (stable) لكل $x > x_o$ إذا كـان لكـل $\in > 0$ يوجد $\delta = \delta(\in) > 0$ بحيث أنه إذا كـان $\bar{y}^*(x,x_o,\bar{y}^*{}_o)$ حلا آخر للمعادلـة (*) ويحقق المتباينة $\|\bar{y}(x_o) - \bar{y}^*(x_o)\| \le \delta$ فيجب أن يحقق المتباينة
$$\|y(x) - y^*(x)\| < \in \qquad , \ \forall x > x_o$$
٢) يقـال أن الحـل $\bar{y}(x,x_o,\bar{y})$ مسـتقر بصـورة محاذيـة إذا كـان مسـتقراً وكـان أي حـل آخر $\bar{y}^*(x,x_o,\bar{y}^*{}_o)$ للمعادلة (*) يحقق المتباينة $\|\bar{y}(x_o) - \bar{y}^*(x_o)\| \le \delta$ يجب أن يحقق العلاقة
$$\|\bar{y}(x) - \bar{y}^*(x)\| \longrightarrow 0 \qquad , x \longrightarrow \infty$$

تعريف 1.7 :

يقال أن الدالة f من رتبة الدالة g على المجموعة E ويرمز لها بالرمز
$$f(x) = O(g(x)) \qquad , \qquad \forall x \in E$$
إذا وجد $C > 0$ لا يعتمد على x بحيث أن
$$|f(x)| \le C|g(x)| \qquad , \qquad \forall x \in E$$

تعريف 1.8 :

يقال أن الدالة f ذات رتبة أعلى (في الصغر) من رتبة الدالة g عندما $x \longrightarrow a$ ويرمز لها بالرمز

$$f(x) = o(g(x)) \qquad , \quad x \longrightarrow a$$

إذا وجدت دالة $\varepsilon(x)$ بحيث أن

$$f(x) = \varepsilon(x) g(x)$$

وأن

$$\varepsilon(x) \longrightarrow 0 \qquad , \quad x \longrightarrow a$$

تعريف 1.9 :

ليكن V فضاء المتجهات ذات البعد n التي عناصرها أعداد معقدة نعرف النظيم $\| \, . \, \|_V$ على الفضاء V بالشكل

$$\|\bar{u}\|_V = \underset{1 \le i \le n}{\operatorname{Max}} \{ \, | u_i | \, \}$$

حيث u_i هي مركبات المتجه $\bar{u}$ وأن الدالة $| \, . \, |$ هي القيمة المطلقة للأعداد المعقدة .

تعريف 1.10 :

ليكن M فضاء المصفوفات المربعة ذات البعد n التي عناصرها أعداد معقدة نعرف النظيم $\| . \|_M$ على الفضاء M بالشكل

$$\|A\|_M = \underset{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le n}}{\operatorname{Max}} \{ | \, a_{ij} \, | \}$$

حيث a_{ij} هي عناصر المصفوفة A وأن الدالة $| . |$ هي القيمة المطلقة للأعداد المعقدة .

تعريف 1.11 :

ليكن F فضاء الدوال المقيدة المعرفة على الفترة I نعرف النظيم $\| . \|_F$ على الفضاء F بالشكل

$$\| \, f \, \|_F = \sup_{x \in I} \{ \| \, f(x) \|_i \}$$

حيث $\| . \|_i$ هو النظيم المعرف على مدى الدالة f .

تعريف 1.12 :

يقال للمصفوفة المربعة A أنها غير منفردة إذا كان محددها لا يساوي صفراً أي أن

$$\det(A) \neq 0$$

تعريف 1.13 :

يقال أن المصفوفتين المربعتين A وB متشابهتان (Similar) إذا وجدت مصفوفة غير منفردة P بحيث أن

$$B = PAP^{-1}$$

تعريف 1.14 :

لتكن A مصفوفة مربعة ، تعرف متعددة الحدود المميزة (Characteristic polynomial) للمصفوفة A بالشكل

$$f(\lambda) = \det(\lambda I - A)$$

حيث I هي المصفوفة المحايدة .

ملاحظة (٤) : إن الدالة $f(\lambda)$ هي متعددة حدود للمتغير λ لذا تمتلك n من الجذور في الأعداد المعقدة وتسمى هذه الجذور بالجذور المميزة للمصفوفة A .

تعريف 1.15 :

تعرف دالة (Mittag-leffler) بالمعلمتين β, α على المستوي المعقد بالشكل

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k\alpha + \beta)} \qquad , \quad \alpha > 0 \ , \quad \beta \in R \ , \quad z \in C$$

مبرهنة 1.8 :

إذا كانت $\lambda_1, \lambda_2, \ldots\ldots, \lambda_n$ هي الجذور المميزة للمصفوفة المربعة A ، وكانت λ_i مختلفة ، فإنه يوجد مصفوفة T بحيث أن

$$T^{-1}AT = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots\ldots\ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots\ldots\ldots & 0 \\ . & & & . \\ . & & & . \\ . & & & . \\ 0 & 0 & \ldots\ldots\ldots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

(أي أن المصفوفة في الطرف الأيمن والمصفوفة A متشابهتان).

مبرهنة 1.9 :

إذا كانت $\lambda_i(x)$ هي القيم المميزة للدالة المصفوفة المربعة المستمرة فإنها تكون مستمرة وإذا كانت A مصفوفة مربعة غير منفردة بحيث أن

$$A(x) \longrightarrow A$$

وكانت القيم المميزة λ_i للمصفوفة A مختلفة فإن

$$\lambda_i(x) \to \lambda_i \quad , \quad x \to \infty$$

وهذا يعني أن بالإمكان إيجاد $a < x_o$ بحيث أن $\lambda_i(x)$ تكون مختلفة لكل $x > x_o$.

ملاحظـــة (٥) : فيما يخص التعـــاريف والمبرهنـــات أنظـــر [Gorenflo 2001]
[Oldham 1974] ، [Struble 1974] , [Nikolsky 1985]
. [Coddington & Levinson 1955] ، [Barrett1954]

البند الثالث : هدف الرسالة ومحتوياتها

تهدف هذه الرسالة إلى دراسة صيغ وسلوك حلول بعض المعادلات التفاضلية الكسرية.
إذ تناولنا في الفصل الأول مقدمة عن الموضوع مع بعض التعاريف والمبرهنات المهمة للدراسة، ثم أعطينا في الفصل الثاني صيغاً لحلول المعادلات التفاضلية الكسرية الخطية بمعاملات ثابتة ، بنوعيها المتجانسة وغير المتجانسة بشروط ابتدائية مختلفة ، فضلاً عن صيغة حل منظومة المعادلات التفاضلية الكسرية الخطية.
وفي الفصل الثالث درسنا سلوك حلول المعادلات السابقة اعتماداً على الصيغ المستحصلة في الفصل الثاني ،ثم درسنا استقرارية المعادلات التفاضلية الكسرية الخطية بمعاملات متغيرة فضلاً عن المعادلات التفاضلية الكسرية غير الخطية بعد تقريبهما إلى معادلات تفاضلية كسرية خطية بمعاملات ثابتة، وتضمن الفصل الرابع الاستنتاجات والتوصيات .

الفصل الثاني

صيغ حلول المعادلات التفاضلية الكسرية الخطية

مقدمة :

في هذا الفصل سوف نعطي صيغ حلول المعادلات التفاضلية الكسرية الخطية ذات المعاملات الثابتة والتي تحقق شروطا ابتدائية معينة .
ومن ثم سنعطي صيغة الحل لمنظومة المعادلات التفاضلية الكسرية الخطية ذات المعاملات الثابتة.

البند الأول: صيغ حلول المعادلات التفاضلية الكسرية الخطية المتجانسة

في هذا البند سوف نستنتج صيغا مختلفة لحلول بعض المعادلات التفاضلية الخطية الكسرية المتجانسة التي تحقق شروطا ابتدائية معينة.
سنبدأ بإعطاء صيغة الحل للمعادلة التفاضلية الكسرية الخطية التالية :

$$\sum_{i=0}^{n} a_i y^{(\alpha-i)} = 0 \qquad ,0 \le n-1 \le \alpha < n \qquad (2.1)$$

مع الشروط الابتدائية

$$y^{(\alpha-j)}(a) = b_j \qquad ,1 \le j \le n \qquad (2.2)$$

نعيد كتابة المعادلة (2.1) باستخدام المؤثر D بالشكل التالي

$$\left[\sum_{i=0}^{n} a_i D^{\alpha-i}\right] y = 0 \qquad (2.3)$$

حسب التعريف (1.7) يمكن كتابة المعادلة (2.3) بالشكل التالي

$$\left[\sum_{i=0}^{n} a_i \overset{n-i}{D} I^{n-\alpha}\right] y = 0 \qquad (2.4)$$

$$\left[\sum_{i=0}^{n} a_i D^{n-i}\right] I^{n-\alpha} y = 0 \qquad (2.5)$$

إذا كانت λ_i $(1 \le i \le n)$ هي جذور متعددة الحدود التالية

$$P_n(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i x^{n-i}$$

ملاحظة (١) : في هذه الرسالة سنتناول متعددات الحدود التي تكون جذورها مختلفة.

يمكن كتابة الطرف الأيسر للمعادلة (2.5) بالشكل

$$\left[\prod_{i=1}^{n}\left(D-\lambda_i\right)\right]I^{n-\alpha}y=0 \qquad (2.6)$$

وحسب صيغ حل المعادلات التفاضلية الخطية ذات المعاملات الثابتة ولرتب صحيحة نحصل على أن

$$I^{n-\alpha}y=\sum_{i=1}^{n}C_i e^{\lambda_i(x-\alpha)} \qquad (2.7)$$

وبالتأثير على طرفي المعادلة (2.7) بالمؤثر $D^{n-\alpha}$ وحسب المبرهنة (1.5) ينتج

$$y=\sum_{i=1}^{n}C_i D^{n-\alpha}e^{\lambda_i(x-a)}=\sum_{i=1}^{n}C_i\sum_{j=0}^{\infty}\lambda_i^j\frac{(x-a)^{j-n+\alpha}}{\Gamma(j-n+\alpha+1)} \qquad (2.8)$$

وهي صيغة الحل للمعادلة التفاضلية (2.1) ومع الشروط الابتدائية (2.2) .

لقد أعطى [Barrett 1954] صيغة الحل للمعادلة التفاضلية الكسرية

$$y^{(\alpha)}-\lambda y=0 \qquad \lambda\in C \qquad ,0\le n-1\le\alpha\le n \qquad (2.9)$$

مع الشروط الابتدائية

$$y^{\alpha-i}(a)=b_i \qquad 1\le i\le n \qquad (2.10)$$

مكافئةً للصيغة

$$y=\left[\sum_{i=1}^{n}b_iD^{i-\alpha}\right]\sum_{j=0}^{\infty}\lambda^i\frac{(x-a)^{j\alpha}}{\Gamma(j\alpha+1)}=\sum_{i=1}^{n}b_i\sum_{j=0}^{\infty}\lambda^i\frac{(x-a)^{(j+1)\alpha-i}}{\Gamma((j+1)\alpha-i+1)} \qquad (2.11)$$

وكحالة خاصة عندما $0<\alpha\le 1$ فإن

$$y=C\sum_{j=0}^{\infty}\lambda^j\frac{(x-a)^{j\alpha+\alpha-1}}{\Gamma(j\alpha+\alpha)} \qquad (2.12)$$

الآن إذا كانت $\beta\in R\,,\alpha>0$ فنعرف الدالة $e_{\alpha,\beta}^{\lambda(x-a)}$ كالآتي

$$e_{\alpha,\beta}^{\lambda(x-a)}=\sum_{j=0}^{\infty}\lambda^j\frac{(x-a)^{j\alpha+\beta}}{\Gamma(j\alpha+\beta+1)} \qquad (2.13)$$

وعندما $\beta=0$ فإن

$$e_{\alpha}^{\lambda(x-a)}=e_{\alpha,o}^{\lambda(x-a)} \qquad (2.14)$$

لذا فإن (2.12) تأخذ الصيغة

$$y = Ce^{\lambda(x-a)}_{\alpha,1-\alpha} = CD^{1-\alpha}e^{\lambda(x-a)}_{\alpha} \qquad (2.15)$$

سنعطي الآن صيغا لحلول المعادلات التفاضلية الكسرية الخطية التالية :

$$\sum_{i=0}^{n} a_{i+1} y^{(\alpha_i)} = 0 \qquad , a_i \in C \qquad (2.16)$$

إذ أن

$$a_{n+1} = 1, a_1 \neq 0, \alpha_o = 0, \alpha_i \leq \alpha_{i+1}, n-1 < \alpha_n < n$$

سنعيد كتابة المعادلة باستخدام المؤثر D بالشكل التالي

$$\left[D^{\alpha_n} + \sum_{i=0}^{n-1} a_{i+1} D^{\alpha_i} \right] y = 0 \qquad (2.17)$$

وعند التأثير على الطرفين بالمؤثر I^{α_n} نحصل على

$$I^{\alpha_n} \left[D^{\alpha_n} + \sum_{i=0}^{n-1} a_{i+1} D^{\alpha_i} \right] y = y_o \qquad (2.18)$$

إذ أن $y_o \in C([a,b])$ هو الجزء المتمم للطرف الأيسر والذي يتلاشى بعد تأثير D^{α_n} عليه، الآن حسب المبرهنة (1.6) فإن

$$\left[1 + \sum_{i=0}^{n-1} a_{i+1} I^{\alpha_n - \alpha_i} \right] y = y_o \qquad (2.19)$$

$$y = y_o - \sum_{i=0}^{n-1} a_{i+1} I^{\alpha_n - \alpha_i} y \qquad (2.20)$$

وبإعادة تعويض الطرف الأيمن عن y في نفس الطرف إلى k من المرات نحصل على

$$y = \sum_{m=0}^{k} (-1)^m \left[\sum_{i=0}^{n-1} a_{i+1} I^{\alpha_n - \alpha_i} \right]^m y_o + \left[\sum_{i=0}^{n-1} a_{i+1} I^{\alpha n - \alpha_i} \right]^{k+1} y \qquad (2.21)$$

ويمكن فك المؤثر التكاملي باستخدام صيغة متعددة الحدود (multinomial) بالشكل

$$\left[\sum_{i=0}^{n-1} a_{i+1} I^{\alpha_n - \alpha_i} \right]^m = \left[\sum_{\sum_{i=1}^{n} k_i = m} \binom{m}{k_1, k_2, \ldots\ldots\ldots, k_n} \bullet \prod_{i=1}^{n} a_i^{k_i} \bullet I^{\sum_{i=1}^{n} k_i \ (\alpha_n - \alpha_{i-1})} \right]$$

إذ أن

$$\binom{m}{k_1,k_2,...,k_n}=\frac{m!}{k_1!k_2!.....k_n!}$$

وبما أن

$$0<\alpha_n-\alpha_{n-1}<\alpha_n-\alpha_{i-1}$$

ينتج أن

$$\sum_{i=1}^{n}k_i(\alpha_n-\alpha_i)>(\alpha_n-\alpha_{n-1})\sum_{i=1}^{n}k_i=m(\alpha_n-\alpha_{n-1})$$

وحسب المبرهنة (1.7) فإن المتسلسلة

$$\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m[\sum_{i=0}^{n-1}a_{i+1}I^{\alpha_n-\alpha_i}]^m y_o$$

متقاربة بانتظام وأن

$$\lim_{k\to\infty}\left[\sum_{i=0}^{n-1}a_{i+1}I^{\alpha_n-\alpha_i}\right]^k y=0$$

نستنتج مما سبق أن الحد الثاني للطرف الأيمن في (2.21) يتلاشى عندما $k\to\infty$

لذلك فإن

$$y=\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m\left[\sum_{i=0}^{n-1}a_{i+1}I^{\alpha_n-\alpha_i}\right]^m y_o \qquad (2.22)$$

الآن إذا كانت الشروط الابتدائية هي

$$y^{(\alpha_n-j)}(a)=b_j \qquad (2.23)$$

فإن $y_o(x)$ تأخذ الصيغة :

$$y_o(x)=\sum_{j=1}^{n}b'_j(x-a)^{\alpha_n-j} \qquad (2.24)$$

وإذا كان $a_n\neq 0$ ، $\alpha_{n-1}\geq\alpha_n-1, b_n\neq 0$ فعند تعويض الدالة y في المعادلة (2.16) سيظهر لدينا الحد

$$a_nD^{\alpha_{n-1}}b'_n\frac{(x-a)^{\alpha_n-1}}{\Gamma(\alpha_n)}=a_nb'_n\frac{(x-a)^{\alpha_n-1-\alpha_{n-1}}}{\Gamma(\alpha_n-\alpha_{n-1})}$$

وعندما تكون $\alpha_{n-1} \neq \alpha_n - 1$ فمن الواضح أن الحد الناتج غير مستمر عند النقطة $x = a$ ، إن ظهور هذا الحد وحدود أخرى ذات قوى سالبة سيؤدي إلى عدم تحقق المعادلة (2.16) لأن عدد هذه الحدود منتهي، كما أنها تشكل دوال مستقلة خطياً مما يعني أن أي تركيب خطي لها لن يتلاشى إلا إذا كانت جميع معاملاتها أصفاراً ، أي أن $b_j = 0$ لكل $1 \leq j \leq n$ وهذه الحالة تمثل الحل التافه $y = 0$.

لذا فلأجل أن تحقق الدالة y المعادلة التفاضلية (2.16) يجب أن لا تحوي y_o حدوداً ذات قوى سالبة ، وإذا كانت $b_j \neq 0$ لكل $1 \leq j \leq n$ عندها يجب أن يكون $a_1 = 0$ وأن يكون $\alpha_i = \alpha_n - n + i$ عندما $a_{i+1} \neq 0$ وهي نفس المعادلة (2.1) .

فيما عدا ذلك، إذا كانت α_i هي أعلى رتبة بحيث أن $\alpha_i \neq \alpha_n - n + i \quad , \quad a_{i+1} \neq 0$

فلكي يكون y حلاً للمعادلة (2.16) يجب أن يكون

$$b'_j = 0 \qquad\qquad \forall \; j > i$$

وعندما $\alpha_i > \alpha_n - n + i$ يجب أن تكون $b'_i = 0$.

ولدراسة المعادلة (2.16) بصيغتها العامة والحصول على صيغ أوسع للحل سوف نحتاج إلى تغيير المؤثرات التفاضلية ، وسنعتمد في ذلك على اسلوب [Diethelm & Ford 2001] في التعامل مع الرتب النسبية، ثم سنوسع الأسلوب إلى نوع معين من الرتب غير النسبية .

أولا / الرتب النسبية:-

يعتمد أسلوب [Diethelm & Ford 2001] على تنعيم الرتب النسبية عن طريق كتابتها بأبسط صورة ثم إيجاد المضاعف المشترك الأصغر للمقامات M و ليكن مقلوبه $\alpha = \dfrac{1}{M}$ ثم كتابة الرتب بالشكل $\alpha_i = \dfrac{\beta_i}{M} = \beta_i \alpha$ حيث β_i أعداد صحيحة موجبة .

الآن سنحول الرتب في المؤثر التفاضلي للمعادلة (2.16) إلى الشكل

$$\left[\sum_{i=0}^{n} a_{i+1} D^{\beta_i(\alpha)} \right] y = 0 \tag{2.25}$$

وكما اشرنا في الفصل الأول ليس شرطاً أن يتساوى المؤثران $D^{\beta_i \alpha}$ و $D^{\beta_i(\alpha)}$ على دالة ما لذا سوف نحدد الفرق بينهما فيما بعد.

لتكن λ_i جذور متعددة الحدود

$$P_N(x) = \sum_{i=0}^{n} a_{i+1} x^{\beta_i}$$

من الواضح أن درجة متعددة الحدود هي $N = \beta_n$ ، نفرض أن الجذور λ_i مختلفة.

يمكن الآن إعادة كتابة المؤثر التفاضلي للمعادلة (2.25) بالشكل :

$$\left[\prod_{i=1}^{N}\left(D^{\alpha}-\lambda_i\right)\right]y=0 \qquad (2.26)$$

وبالتأثير على الطرفين بالمؤثر I^{α_n} ينتج

$$\left[\prod_{i=1}^{N}\left(1-\lambda_i I^{\alpha}\right)\right]y=y_o \qquad (2.27)$$

حيث أن y_o تمثل الجزء المحذوف من الطرف الأيسر بعد التأثير عليه بالمؤثر D^{α_n} .

المبرهنة التالية تعطي صيغة لمعكوس المؤثر التكاملي $(1-\lambda I^{\alpha})$.

مبرهنة 2.1 :

اذا كانت $f\in C([a,b])$ فإن معكوس المؤثر $\left(1-\lambda I^{\alpha}\right)$ على f هو

$$\left(1-\lambda I^{\alpha}\right)^{-1}=\sum_{n=0}^{\infty}\lambda^{n}I^{n\alpha} \qquad (2.29)$$

البرهان :

$$\left(1-\lambda I^{\alpha}\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty}\lambda^{n}I^{n\alpha}\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\lambda^{n}I^{n\alpha}-\sum_{n=0}^{\infty}\lambda^{n+1}I^{(n+1)\alpha}=1$$

كذلك

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty}\lambda^{n}I^{n\alpha}\right)\left(1-\lambda I^{\alpha}\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\lambda^{n}I^{n\alpha}-\sum_{n=0}^{\infty}\lambda^{n+1}I^{(n+1)\alpha}=1$$

مبرهنة 2.2 :

إذا كانت $f \in C([a,b])$ فإن

$$\left[\prod_{i=1}^{N}\left(1-\lambda_i I^{\alpha}\right)\right]^{-1} = \sum_{i=1}^{N} C_i'\left(1-\lambda_i I^{\alpha}\right)^{-1} \qquad (2.30)$$

إذ أن

$$C_i' = \frac{\lambda_i^N}{\prod\limits_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{N}\left(\lambda_i-\lambda_j\right)}$$

البرهان:-

من المعلوم أن

$$\left[\prod_{i=1}^{N}\left(1-\lambda_i I^{\alpha}\right)\right]^{-1} = \prod_{i=0}^{N}\left(1-\lambda_{n-i} I^{\alpha}\right)^{-1}$$

سنبدأ من المضروبين الأخيرين

$$\left(1-\lambda_2 I^{\alpha}\right)^{-1}\left(1-\lambda_1 I^{\alpha}\right)^{-1} = \left(\sum_{n=0}^{\infty}\lambda_2^n I^{n\alpha}\right)\left(\sum_{m=0}^{\infty}\lambda_1^m I^{m\alpha}\right)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\lambda_1^m\lambda_2^n I^{(n+m)\alpha}$$

ولجمع معاملات الرتب المتشابهة نفرض أن $k = n + m$ فنحصل على أن

$$\left(1-\lambda_2 I^{\alpha}\right)^{-1}\left(1-\lambda_1 I^{\alpha}\right)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{i=0}^{k}\lambda_1^i\lambda_2^{k-i}\right) I^{k\alpha}$$

وبما أن $\lambda_2 \neq \lambda_1$ يمكن استخدام المتطابقة

$$\left(x^{k+1}-y^{k+1}\right) = (x-y)\left(\sum_{i=0}^{k}x^i y^{k-i}\right)$$

أي أن

$$\sum_{i=0}^{k}x^i y^{k-i} = \frac{x^{k+1}-y^{k+1}}{x-y} \qquad , \ x \neq y$$

إذن

$$\left(1-\lambda_2 I^{\alpha}\right)^{-1}\left(1-\lambda_1 I^{\alpha}\right)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda_1^{k+1}-\lambda_2^{k+1}}{\lambda_1-\lambda_2} I^{k\alpha}$$

$$\left(1-\lambda_2 I^{\alpha}\right)^{-1}\left(1-\lambda_1 I^{\alpha}\right)^{-1}=\frac{\lambda_1}{(\lambda_1-\lambda_2)}\sum_{k=0}^{\infty}\lambda_1^k I^{k\alpha}+\frac{\lambda_2}{(\lambda_2-\lambda_1)}\sum_{k=0}^{\infty}\lambda_2^k I^{k\alpha}$$

$$=\frac{\lambda_1}{(\lambda_1-\lambda_2)}\left(1-\lambda_1 I^{\alpha}\right)^{-1}+\frac{\lambda_2}{(\lambda_1-\lambda_2)}\left(1-\lambda_2 I^{\alpha}\right)^{-1}$$

وبالاستمرار بعملية الضرب واستخدام الأسلوب نفسه ينتج أن

$$\left[\prod_{i=0}^{N-1}\left(1-\lambda_{n-i} I^{\alpha}\right)\right]^{-1}=\sum_{i=1}^{N} C_i'\left(1-\lambda_i I^{\alpha}\right)^{-1}$$

الآن بضرب طرفي المعادلة (2.27) بالمعكوس $\left[\prod_{i=1}^{N}(1-\lambda_{n-i} I^{\alpha})\right]^{-1}$ نحصل على أن

$$y=\left[\sum_{i=1}^{N} C_i'\sum_{k=0}^{\infty}\lambda_i^k I^{k\alpha}\right]y_o \qquad (2.31)$$

إن صيغة الدالة الأخيرة تعتمد على الدالة y_o الناتجة عن نوع المؤثرات التفاضلية للشروط الابتدائية ويمكن تمييز نوعين من مؤثرات الشروط الابتدائية كالآتي:

النوع الاول :- الشروط الابتدائية ذات الصيغة :

$$\begin{aligned} &D^{\alpha-1}[y]_{x=a}=b_1 \\ &D^{\alpha-1}[y^{j(\alpha)}]_{x=a}=b_{j+1} \qquad , 1\le j\le N-1 \end{aligned} \qquad (2.32)$$

حيث تأخذ y_o الصيغة

$$y_o=\sum_{j=1}^{N} b_j\frac{(x-a)^{j\alpha-1}}{\Gamma(j\alpha)} \qquad (2.33)$$

حيث أن

$$b_j'=b_j\sum_{i=k}^{n} a_{i+1} \qquad , \quad \beta_{k-1}+M\le j<\beta_k+M$$

وتأخذ الدالة y الصيغة

$$y=D^{1-\alpha}\sum_{i=1}^{N} C_i e_{\alpha}^{\lambda_i(x-a)} \qquad (2.34)$$

إذن

$$\sum_{i=1}^{N} C_i\lambda_i^{j-1}=b_j \qquad , \quad 1\le j\le N$$

النوع الثاني :- الشروط الابتدائية ذات الصيغة

$$y(a) = b_0$$

$$D^{j(\alpha)}\left[y - \sum_{i=0}^{j-1} b_i \frac{(x-a)^{i\alpha}}{\Gamma(i\alpha+1)} \right]_{x=a} \quad , \quad 1 \le j \le N-1 \tag{2.35}$$

حيث تأخذ y_o الصيغة الآتية

$$y_o = \sum_{j=0}^{N-1} b'_j \frac{(x-a)^{j\alpha}}{\Gamma(j\alpha+1)} \tag{2.36}$$

حيث أن

$$b'_j = b_j \sum_{i=k}^{n} a_{i+1} \quad , \quad \beta_{k-1} \le j < \beta_k$$

وتأخذ الدالة y الصيغة الآتية

$$y = \sum_{i=1}^{N} C_i e_{\alpha}^{\lambda_i (x-a)} \tag{2.37}$$

إذن

$$\sum_{i=1}^{N} C_i \lambda_i^j = b_j \quad , \quad 0 \le j \le N-1$$

لاحظ أن الثوابت C_i تعتمد على القيم المميزة λ_i وعلى الثوابت الاختيارية b'_i .
وهناك حالتان خاصتان مهمتان للشروط الابتدائية :-

أ- الشروط الاعتيادية الناتجة عن معكوس المؤثر D^{α_n} وهي

$$y^{\alpha-j}(a) = b_j \quad , 1 \le j \le n-1 \tag{2.38}$$

لاحظ أن $j\,, \alpha_n$ كلاهما يقبل القسمة على α وتأخذ y_o الصيغة

$$y_o = \sum_{j=1}^{n-1} b'_j \frac{(x-a)^{\alpha_n - j}}{\Gamma(\alpha_n - j + 1)} \tag{2.39}$$

وتأخذ y الصيغة الآتية :

$$y = \sum_{i=1}^{N} C_i e_{\alpha}^{\lambda_i (x-a)} \tag{2.40}$$

ب- الشروط الصحيحة :-

$$D^{j}(a)=b_{j} \qquad , \quad 0\le j\le n-1 \qquad (2.41)$$

إن هذه الرتب مفيدة جدا من الناحية العملية ، إذ يسهل إعطاؤها معاني فيزياوية وقد حسّن [Caputo 1967] المؤثر التفاضلي الكسري ليضم هذه الشروط بالصيغة :

$$D^{\alpha}\left[y-T_{n-1}y\right]=D^{\alpha}\left[y-\sum_{j=0}^{n-1}b_{j}\frac{(x-a)^{j}}{j!}\right] \qquad (2.42)$$

إذ أن $T_{n-1}y$ هي متعددة حدود تايلر إلى الرتبة $(n-1)$ للدالة y ، أي أن $b_{j}=y^{(j)}(a)$.
وهذه صيغ y, y_{o} على التوالي

$$y_{o}=\sum_{j=0}^{n-1}b'_{j}\frac{(x-a)^{j}}{j!} \qquad (2.43)$$

$$y=\sum_{i=1}^{N}C_{i}e_{\alpha}^{\lambda_{i}(x-a)} \qquad (2.44)$$

إن الحالتين (أ ، ب) يمكن تصنيفهما ضمن كلا النوعين (الأول والثاني) للشروط الإبتدائية.
وبعد أن أنشأنا صيغة لدالة تتلاءم مع الشروط الابتدائية جميعها سوف نعطي الفرق بين المعادلتين الناتجتين عن المؤثرين

$$\left[\sum_{i=0}^{n}a_{i+1}D^{\alpha_{i}}\right] \quad , \quad \left[\sum_{i=0}^{n}a_{i+1}D^{\beta_{i}(\alpha)}\right]$$

إن المؤثر المنعّم يختلف عن الأصلي فقط مع الشروط من النوع الأول ، لاحظ أن

$$\left[\sum_{i=0}^{n}a_{i+1}D^{\beta_{j}(\alpha)}\right]y=\left[\sum_{i=0}^{n}a_{i+1}\left(D^{\alpha}\right)^{\beta_{i}}\right]D^{1-\alpha}\sum_{j=1}^{N}C_{j}e_{\alpha}^{\lambda_{j}(x-a)}$$

وحسب صيغة حل المعادلة (2.9) فإن

$$D^{\alpha}D^{1-\alpha}e_{\alpha}^{\lambda x}=\lambda D^{1-\alpha}e_{\alpha}^{\lambda x}$$

لذا فإن

$$\left[\sum_{i=0}^{n}a_{i+1}D^{\beta_{j}(\alpha)}\right]y=\sum_{j=1}^{N}C_{j}\left[\sum_{i=0}^{n}a_{i+1}\left(D^{\alpha}\right)^{\beta_{i}}\right]D^{1-\alpha}e_{\alpha}^{\lambda_{j}(x-a)}$$

$$=\sum_{j=1}^{N}C_{j}\left(\sum_{i=0}^{n}a_{i+1}\lambda_{j}^{\beta_{i}}\right)D^{1-\alpha}e_{\alpha}^{\lambda_{j}(x-a)} \qquad (2.45)$$

وبما أن λ_i تمثل جذورا لمتعددة الحدود$P_n(x)$ فإن

$$\left[\sum_{i=0}^{n} a_{i+1} D^{\beta_i(\alpha)}\right] y = 0$$

إن الفرق هو تلاشي الحدود في y التي رتبتها اقل من β_i تحت المؤثرات $D^{\beta_i(\alpha)}$ ، وهذا قد لا يحدث مع المؤثر D^{α_i} كما قد لا يحدث حتى مع $D^{\beta_i(\alpha)}$ في حالة الشروط من النوع الثاني .
في دراستنا سنعتمد النوع الثاني للشروط الابتدائية الذي سنلاحظ فائدته في البند القادم ، لذا سندرس المعادلة التفاضلية التي تحققها الدالة y في الصيغة (2.37) الناتجة عن النوع الثاني من الشروط الابتدائية

$$\left[\sum_{i=0}^{n} a_{i+1} D^{\alpha_i}\right] y = \left[\sum_{i=0}^{n} a_{i+1} D^{\alpha_i}\right] \sum_{j=1}^{N} C_j e_{\alpha}^{\lambda_j (x-a)}$$

$$= \sum_{j=1}^{N} C_j \left[\sum_{i=0}^{n} a_{i+1} D^{\alpha_i}\right] e_{\alpha}^{\lambda_j (x-a)}$$

$$= \sum_{j=1}^{N} C_j \sum_{i=1}^{n} a_{i+1} \left(\sum_{k=0}^{\beta_{i-1}} \lambda_j^k \frac{(x-a)^{(k-\beta_i)\alpha}}{\Gamma((k-\beta_i)\alpha+1)} + \lambda_j^{\beta_i} e_{\alpha}^{\lambda_j (x-a)} \right)$$

وبما أن λ_j هي جذور لمتعددة الحدود $P_n(x)$ فإن الجزء الثاني يتلاشى وكما في الطرف الأيمن للمعادلة (2.45) ينتج :

$$\left[\sum_{i=0}^{n} a_{i+1} D^{\alpha_i}\right] y = \sum_{j=1}^{N} C_j \sum_{i=1}^{n} a_{i+1} \sum_{k=0}^{\beta_i - 1} \lambda_j^k \frac{(x-a)^{(k-\beta_i)\alpha}}{\Gamma((k-\beta_i)\alpha+1)} \qquad (2.46)$$

وان الحدود الناتجة ذات الدرجة الصحيحة السالبة تتلاشى حسب المبرهنة (1.3) .
بما أن حدود y ذات القوى الأقل من $N\alpha$ تأخذ الصيغة

$$\sum_{k=0}^{N-1} b_k \frac{(x-a)^{k\alpha}}{\Gamma(k\alpha+1)}$$

وبما أن $b_k = \sum_{i=1}^{N} C_i \lambda_i^k$ لذا يمكن إعادة صياغة الطرف الأيمن للمعادلة (2.46) بالشكل:-

$$\sum_{j=1}^{N} C_j \sum_{i=1}^{n} a_{i+1} \sum_{k=0}^{\beta_i-1} \lambda_j^k \frac{(x-a)^{(k-\beta_i)\alpha}}{\Gamma((k-\beta_i)\alpha+1)}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} a_{i+1} \sum_{k=0}^{\beta_i-1} \frac{(x-a)^{(k-\beta_i)\alpha}}{\Gamma((k-\beta_i)\alpha+1)} \sum_{j=1}^{N} C_j \lambda_j^k$$

$$= \sum_{j=1}^{n} a_{i+1} \sum_{k=0}^{\beta_i-1} b_k \frac{(x-a)^{(k-\beta_i)\alpha}}{\Gamma((k-\beta_i)\alpha+1)}$$

أي أن المعادلة التفاضلية التي تحققها y تحت المؤثر الأصلي هي

$$\left[\sum_{i=0}^{n} a_{i+1} D^{\alpha_i}\right] y = B(x) \qquad (2.47)$$

حيث أن

$$B(x) = \sum_{i=0}^{n} a_{i+1} \sum_{k=0}^{\beta_i-1} b_k \frac{(x-a)^{(k-\beta_i)\alpha}}{\Gamma((k-\beta_i)\alpha+1)} \qquad (2.48)$$

الآن بطرح $B(x)$ من الطرفين وعزل معاملات a_{i+1} ينتج

$$\sum_{i=0}^{n} a_{i+1} D^{\alpha_i} \left(y - \sum_{j=0}^{\beta_i-1} b_j \frac{(x-a)^{j\alpha}}{\Gamma(j\alpha+1)} \right) = 0 \qquad (2.49)$$

سنعـرّف الآن المـؤثرات التفاضـلية المحسـنة $D_*^{\alpha_i}$ للمعادلـة (2.16) تحـت الشـروط (2.35) بالشكل

$$D_*^{\alpha_i}(y) = D^{\alpha_i} \left(y - \sum_{j=0}^{\beta_i-1} b_j \frac{(x-a)^{j\alpha}}{\Gamma(j\alpha+1)} \right) \qquad (2.50)$$

وبإعادة صياغة المعادلة (2.47) باستخدام المؤثرات الجديدة نحصل على أن

$$\left[\sum_{i=0}^{n} a_{i+1} D_*^{\alpha_i}\right] y = 0 \qquad (2.51)$$

بالطريقة نفسها نعّرف المؤثرات المحسنة $D_*^{\alpha_i}$ للمعادلة (2.16) تحت الشروط(2.32) بالشكل

$$D_*^{\alpha_i}(y) = D^{\alpha_i}\left(y - D^{1-\alpha}\sum_{i=0}^{\beta_j - 1} b_j \frac{(x-a)^{j\alpha}}{\Gamma(j\alpha+1)} \right) \tag{2.52}$$

سنسمي المعادلة (2.51) بالصيغة المحسّنة للمعادلة (2.16) إن y هو حل المعادلة الخطية المتجانسة (2.51) أما حل المعادلة (2.16) فهو حالة خاصة منها .

ثانياً/ الرتب غير النسبية :-

إذا كانت الرتب α_i أعدادا غير نسبية ووجد عدد غير نسبي α بحيث تكون α_i مضاعفات للعدد α فيمكن كتابة الرتب α_i بالشكل

$$\alpha_i = \beta_i \alpha \quad , \ \beta_i \in Z^+ \tag{2.53}$$

سوف نتناول هذا النوع من الرتب غير النسبية .

يمكن إعادة كل الخطوات في حالة الأعداد غير النسبية مع ملاحظة أن الاختلاف بين الحالتين هو فقط أن حالة الأعداد غير النسبية لا تتضمن الحالتين الخاصتين للشروط الابتدائية

$$y^j(a) = b_j \qquad , \qquad 0 \le j \le n-1$$

$$y^{\alpha_n - j}(a) = b_j \qquad , \qquad 1 \le j \le n$$

لأن الأعداد الصحيحة j لا يمكن أن تكون مضاعفات للعدد غير النسبي α لذا لن نتطرق إلى هاتين الحالتين .

سوف نعتمد المعادلات في الصيغ المحسنة وهي الصيغتان (2.50) و (2.52) حل المعادلة (2.51)(عندما تحقق α_i الشرط (2.53)) مع الشروط الابتدائية (2.32) و (2.35) على التوالي .

البند الثاني: صيغ حلول المعادلات التفاضلية الكسرية الخطية غير المتجانسة:-

في هذا البند سنعطي صيغة الحل للمعادلات التفاضلية الكسرية المذكورة في البند السابق ولكن بالصيغة غير المتجانسة

وكما في البند السابق سنبدأ بالمعادلة التفاضلية الكسرية التالية

$$\sum_{i=0}^{n} a_i y^{\alpha-i} = f(x) \qquad , \quad 0 \le n-1 \le \alpha < n \tag{2.54}$$

مع الشروط الابتدائية

$$y^{\alpha-j}(a) = b_j \qquad , \quad 1 \le j \le n \tag{2.55}$$

سوف نستخدم نفس الأسلوب السابق

$$\left[\sum_{i=0}^{n} a_i D^{\alpha-i}\right] y = f(x)$$

$$\Rightarrow \left[\sum_{i=0}^{n} a_i D^{n-i}\right] I^{n-\alpha} y = f(x)$$

$$\Rightarrow \left[\prod_{i=1}^{n} (D-\lambda_i)\right] I^{n-\alpha} = f(x)$$

حيث λ_i هي جذور متعددة الحدود $\sum_{i=0}^{n} a_i x^{n-i}$ ونفرض أنها مختلفة.

فحسب صيغ حل المعادلات التفاضلية الخطية ذات المعاملات الثابتة ولرتب صحيحة نحصل على

$$I^{n-\alpha} y = \sum_{i=1}^{n} C_i e^{\lambda_i (x-a)} + \int_a^x \sum_{i=1}^{n} C_i' e^{\lambda_i (x-t)} f(t) dt \tag{2.56}$$

حيث

$$C_i' = \frac{\lambda_i^n}{\prod\limits_{\substack{j=1 \\ j \ne i}}^{n} (\lambda_i - \lambda_j)}$$

إن الفرق بين C_i' و C_i هو أن C_i' تعتمد على λ_i فقط ولا تتأثر بتغير الشروط الابتدائية بينما C_i تعتمد على λ_i وعلى الثوابت الاختيارية b_j .

وبالتأثير على الطرفين بالمؤثر $D^{n-\alpha}$ ينتج

$$y = D^{n-\alpha} \sum_{i=1}^{n} C_i e^{\lambda_i (x-a)} + D_x^{n-\alpha} \int_a^x \sum_{i=1}^{n} C_i' e^{\lambda_i (x-t)} f(t) dt \tag{2.57}$$

هي صيغة حل المعادلة (2.54) مع الشروط (2.55)

سنعطي الآن صيغا لحلول المعادلات الكسرية الخطية غير المتجانسة مع المؤثر المحسّـن

$$\left[\sum_{i=0}^{n} a_{i+1} D_*^{\alpha_i}\right] y = f(x) \tag{2.58}$$

حيث $f \in C([a,b])$ وأن $a_1 \neq 0$ ، $a_{n+1} = 1$ ،و الرتب α_i يمكن كتابتها بالشكل

$\alpha_i = \beta_i \alpha \quad , \ \alpha \in R^+ \quad , \ \beta_i \in Z \quad , \beta_i \geq 0$

و β_i ليس لها عامل مشترك عدا العدد 1 .

نبدأ بالتأثير على طرفي المعادلة (2.58) بالمؤثر I^{α_n} ينتج

$$\left[\sum_{i=0}^{n} a_{i+1} I^{\alpha_n - \alpha_i}\right] y = y_o + I^{\alpha_n} f \tag{2.59}$$

حيث y_0 هو الجزء المحذوف بعد تأثير $D_*^{\alpha_n}$ ويعتمد على نوع الشروط الابتدائية .

لتكن λ_i هي جذور متعددة الحدود $P_n(x) = \sum_{i=1}^{n} a_{i+1} x^{N-\beta_i}$ فإن

$$\left[\prod_{i=1}^{N}\left(1 - \lambda_i I^{\alpha}\right)\right] y = y_o + I^{\alpha_n} f \tag{2.60}$$

وبالتأثير على طرفي المعادلة بالمعكوس $\left[\prod_{i=1}^{N}\left(1 - \lambda_i I^{\alpha}\right)\right]^{-1}$ و حسب مبرهنة (2.2) ينتج

$$\begin{aligned} y &= \sum_{i=1}^{N} C_i \left(1 - \lambda_i I^{\alpha}\right)^{-1} y_o + I^{\alpha_n} \sum_{i=1}^{N} C_i' \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_i^k I^{k\alpha} f(t) \\ &= \sum_{i=1}^{N} C_i \left(1 - \lambda_i I^{\alpha}\right)^{-1} y_o + I^{\alpha_n - 1} \int_a^x \sum_{i=1}^{N} C_i' e_{\alpha}^{\lambda_i (x-t)} f(t)\, dt \end{aligned} \tag{2.61}$$

عندما تكون الشروط الابتدائية هي (2.32) فإن

$$y = D^{1-\alpha} \sum_{i=1}^{N} C_i e_{\alpha}^{\lambda_i (x-a)} + I^{\alpha_n - 1} \int_a^x \sum_{i=1}^{N} C_i' e_{\alpha}^{\lambda_i (x-t)} f(t)\, dt \tag{2.62}$$

أما عندما تكون الشروط الابتدائية هي (2.35) فإن الحل يكون بالشكل

$$y = \sum_{i=1}^{N} C_i e_{\alpha}^{\lambda_i (x-a)} + I^{\alpha_n - 1} \int_a^x \sum_{i=1}^{N} C_i' e_{\alpha}^{\lambda_i (x-t)} f(t)\, dt \tag{2.63}$$

مثال 2.1 :
لإيجاد حل المعادلة التفاضلية الكسرية الخطية غير المتجانسة

$$y^{2(0.5)} + y^{(0.5)} - 2y = \sin(x)$$

مع الشروط الإبتدائية

$$y(0) = 0 \quad , \quad y^{(0.5)}(0) = 1$$

نجد أولا حل المعادلة المتجانسة

$$[D_*^{2(0.5)} + D_*^{0.5} - 2]y = 0$$
$$\Rightarrow (D_*^{0.5} - 1)(D_*^{0.5} + 2)y = 0$$
$$\Rightarrow y = C_1 e_{0.5}^{x} + C_2 e_{0.5}^{-2x}$$

وحسب الشروط الابتدائية فإن

$$C_1 + C_2 = 0$$
$$C_1 - 2C_2 = 1$$

وبحل المعادلتين آنياً نجد أن

$$C_1 = \frac{1}{3} \qquad , \quad C_2 = -\frac{1}{3}$$

لذا يكون حل المعادلة المتجانسة بالصيغة

$$y = \frac{1}{3} e_{0.5}^{x} - \frac{1}{3} e_{0.5}^{-2x}$$

و يكون حل المعادلة غير المتجانسة بالصيغة

$$y = \frac{1}{3}\left(e_{0.5}^{x} - e_{0.5}^{-2x} + I^{\alpha-1}\int_0^x (e_{0.5}^{(x-t)} - 2e_{0.5}^{-2(x-t)}) \sin t \, dt \right)$$

البند الثالث : صيغة الحل لمنظومة معادلات تفاضلية كسرية خطية .

في هذا البند سوف نتناول صيغة الحل لمنظومة من المعادلات التفاضلية الخطية بالاستفادة من الصيغ السابقة .

سنبدأ بتحويل المعادلة التفاضلية الخطية

$$\left[\sum_{i=0}^{n} a_{i+1} D_*^{\alpha_i}\right] y = f(x)$$

حيث أن $a_1 \neq 0, a_{n+1} = 1, \alpha_o = 0, \alpha_i < \alpha_{i+1}\ , n-1 < \alpha \leq n$ إلى منظومة من المعادلات التفاضلية الخطية.

أولا :- إذا كانت الشروط الابتدائية من النوع (2.32) فنفرض أن

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= y \\ y_2 &= y^{\alpha} \\ &\ \ \vdots \\ y_N &= y^{(N-1)\alpha} \end{aligned}\right] \tag{2.65}$$

لذا فإن منظومة المعادلات تأخذ الصيغة

$$\left.\begin{aligned} y_1^{\alpha} &= y_2 \\ y_2^{\alpha} &= y_3 \\ &\ \ \vdots \\ y_N^{\alpha} &= \sum_{i=0}^{n-1} -a_{i+1} y_{\beta_{i+1}} + f(x) \end{aligned}\right] \tag{2.66}$$

وإن الصيغة الاتجاهية المكافئة للمنظومة (2.66) هي

$$D^{\alpha}\bar{y} = A\bar{y} + \bar{f}(x) \tag{2.67}$$

حيث أن

$$\bar{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ . \\ . \\ . \\ y_N \end{bmatrix} \quad , \quad \bar{f}(x) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ . \\ . \\ . \\ f(x) \end{bmatrix}$$

$$A_{N\times N} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & .. & . & . & 0 \\ 0 & 0 & 1 & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ a'_1 & a'_2 & a'_3 & . & . & a'_N \end{bmatrix},$$

$a'_{\beta j+1} = -a_{j+1} \quad , \quad 0 \le j \le n-1$

$a'_i = 0$ عدا ذلك

أما الشرط الابتدائي فيعطى بالصيغة الاتجاهية الآتية :

$$\bar{y}^{\alpha-1}(a) = \bar{b}$$

ثانيا :- أما إذا كانت الشروط الابتدائية من النوع (2.35) فنعرف(المتجه التفاضلي $\bar{D}_*^{\alpha}$) بالشكل

$$\bar{D}_*^{\alpha}\bar{y} = \begin{bmatrix} D^{\alpha}(y_1 - b_1) \\ D^{\alpha}(y_2 - b_2) \\ . \\ . \\ . \\ D^{\alpha}(y_N - b_N) \end{bmatrix} \tag{2.68}$$

وبذلك يكون شكل المنظومة هو

$$\left.\begin{array}{l} D^{\alpha}(y_1-b_1) \\ \quad\cdot \\ \quad\cdot \\ \quad\cdot \\ D^{\alpha}(y_N-b_N)=\sum_{i=1}^{n-1}-a_{i+1}y_{\beta_{i+1}}+f(x) \end{array}\right] \qquad (2.69)$$

أما الصيغة الاتجاهية المكافئة فهي

$$\overline{D}_*^{\alpha}\overline{y}=A\overline{y}+\bar{f}(x) \qquad (2.70)$$

مع الشرط الابتدائي

$$\overline{y}(a)=\overline{b}$$

الآن سنوسع الصيغة السابقة إلى أية منظومة معادلات من الشكل

$$\left.\begin{array}{l} D_1^{\alpha}y_1=a_{11}y_1+a_{12}y_2+\ldots\ldots+a_{1N}y_N+f_1(x) \\ \quad\vdots \\ D_n^{\alpha}y_N=a_{N1}y_1+a_{N2}y_2+\ldots+a_{NN}y_N+f_n(x) \end{array}\right] \qquad (2.71)$$

حيث أن المؤثرات D_i^{α} تعتمد على نوع الشروط الابتدائية

1) إذا كانت من الصيغة (2.32) فإن

$$D_j^{\alpha}y_j=D^{\alpha}y_j$$

2) إذا كانت من الصيغة (2.35) فإن

$$D_j^{\alpha}y_j=D^{\alpha}\left(y_j-b_j\right)$$

وبذلك تكون الصيغة الاتجاهية للمنظومة (2.71) هي

$$\overline{D}_*^{\alpha}\overline{y}=A\overline{y}+\bar{f}(x) \qquad (2.72)$$

حيث أن

$$\bar{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ . \\ . \\ . \\ . \\ y_N \end{bmatrix} \quad , \quad \bar{f}(x) = \begin{bmatrix} f_1(x) \\ . \\ . \\ . \\ . \\ f_N(x) \end{bmatrix}$$

مع نوعين من الشروط الابتدائية هما

1) $\bar{y}^{\alpha-1}(a) = \bar{b}$

2) $\bar{y}(a) = \bar{b}$

$$A_{NN} = \begin{bmatrix} a_{11}a_{12}\ldots a_{1N} \\ . \quad\quad . \\ . \quad\quad . \\ . \quad\quad . \\ a_{N1}a_{N2}\ldots a_{NN} \end{bmatrix} \qquad \bar{D}_*^{\alpha} = \begin{bmatrix} D_1^{\alpha} y_1 \\ D_2^{\alpha} y_2 \\ . \\ . \\ . \\ D_N^{\alpha} y_N \end{bmatrix}$$

سنعطي في الجزء الأخير من البند صيغة الحل للمعادلة الاتجاهية

$$\bar{D}_*^{\alpha}\bar{y} = A\bar{y} + \bar{f}(x) \tag{2.73}$$

وسنقتصر على الشرط الابتدائي

$$\bar{y}(a) = \bar{b} \tag{2.74}$$

حيث أن

$$\bar{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ . \\ b_N \end{bmatrix}$$

لنفرض أن المتجه $\bar{y}$ هو تحويل خطي لمتجه آخر $\bar{z}$ بالشكل

$$\bar{y} = B\bar{z} \tag{2.75}$$

حيث $B_{N\times N}$ مصفوفة غير منفردة .

بالتعويض في المعادلة (2.73) ينتج

$$\overline{D}_*^{\alpha} B\bar{z} = AB\bar{z} + \bar{f}(x)$$

بضرب طرفي المعادلة بالمصفوفة B^{-1} من اليسار ينتج

$$\overline{D}_*^{\alpha} \bar{z} = B^{-1}AB\bar{z} + B^{-1}\bar{f}(x) \tag{2.76}$$

لتكن

$$E = B^{-1}AB$$

فإن

$$\overline{D}_*^{\alpha} \bar{z} = E\bar{z} + B^{-1}\bar{f}(x) \tag{2.77}$$

نلاحظ أن المصفوفتين A و E متشابهتان ، لذا سنحاول إيجاد مصفوفة E مشابهة للمصفوفة A بحيث يكون من السهولة أن نجد صيغة الحل للمعادلة (2.77) ، عندها سيسهل إيجاد صيغة الحل للمعادلة (2.72) حسب التحويل(2.75)

إذا كانت $\{\lambda_i\}$ هي القيم المميزة للمصفوفة A ولنفرض أنها مختلفة ، فحسب المبرهنة (1.8) يوجد مصفوفة B بحيث أن

$$B^{-1}AB = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \ldots 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \ldots 0 \\ & & . & \\ & & . & \\ & & . & \\ 0 & 0 & . & \ldots \lambda_N \end{bmatrix} = E$$

سنحاول الآن أن نجد الحل للمعادلة (2.77) .

بالتأثير على الطرفين في العادلة (2.77) بالمؤثر I^{α} نحصل على أن

$$\bar{z} = \bar{z}(a) + I^{\alpha}B^{-1}\bar{f} + I^{\alpha}E\bar{z} \qquad , \qquad \bar{z}(a) = \begin{bmatrix} b_1 \\ . \\ . \\ . \\ b_N \end{bmatrix}$$

وبالاستمرار بتعويض الطرف الأيمن بدلاً عن z في نفس الطرف m من المرات ينتج

$$\bar{z} = \left(\sum_{k=0}^{m} E^k I^{k\alpha} \right) \left(\bar{z}(a) + I^{\alpha}\bar{f} \right) + I^{m\alpha}E^m \, \bar{z} \tag{2.78}$$

وبالاستمرار بالعملية إلى مالا نهاية ، يتلاشى الحد الثاني في الطرف الأيمن ونصل إلى :

$$\bar{z} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x-a)^{k\alpha}}{\Gamma(k\alpha+1)} E^k \bar{z}(a) + I^{\alpha} \sum_{k=0}^{\infty} E^k I^{k\alpha} B^{-1} \bar{f} \qquad (2.79)$$

وبما أن E مصفوفة قطرية فإن

$$E^k = \begin{bmatrix} \lambda_1^k & 0 \;..... & 0 \\ 0 & \lambda_2^k \;..... & 0 \\ 0 & 0 \;..... & \lambda_n^k \end{bmatrix}$$

وباستخدام صيغ الدوال $e_{\alpha}^{\lambda_i (x-a)}$ نجد أن

$$\sum_{k=0}^{\infty} E^k \frac{(x-a)^{k\alpha}}{\Gamma(k\alpha+1)} = \begin{bmatrix} e_{\alpha}^{\lambda_1 (x-a)} & ......0 \\ & . \\ & . \\ & . \\ 0...... & e_{\alpha}^{\lambda_N (x-a)} \end{bmatrix} \qquad (2.80)$$

سنرمز لمصفوفة الطرف الأيمن بالرمز $e_{\alpha}^{\Lambda(x-a)}$ ، وبذلك تكون صيغة الحل هي

$$\bar{z} = e_{\alpha}^{\Lambda(x-a)} \bar{z}(a) + I^{\alpha-1} \int_a^x e_{\alpha}^{\Lambda(x-t)} B^{-1} \bar{f}(t) dt \qquad (2.81)$$

وحسب التحويل (2.75) فإن

$$\bar{z}(a) = B^{-1} \bar{y}(a) \qquad (2.82)$$

لذلك يكون حل المعادلة (2.73) بالصيغة

$$\bar{y} = B\bar{z} = \left(B e_{\alpha}^{\Lambda(x-a)} B^{-1}\right) \bar{b} + I^{\alpha-1} \int_a^x \left(B e_{\alpha}^{\Lambda(x-t)} B^{-1}\right) \bar{f}(t) dt \qquad (2.83)$$

المبرهنة التالية مفيدة عند الحاجة إلى تحديد قاعدة (Base) لحلول المعادلة (2.73) .

مبرهنة 2.3 :
لتكن $\{\bar{y}_j\}$ هي N من حلول المعادلة المتجانسة

$$\bar{D}_*^{\alpha}\bar{y} = E\bar{y} \qquad (2.84)$$

تكون هذه الحلول مستقلة دائما تقريبا على الفترة $[a,\infty)$ إذا وفقط إذا كانت ابتداءً مستقلة خطيا، أي أن $\{\bar{y}_j(a)\}$ مستقلة خطيا .

البرهان:
لنفرض أن

$$\bar{y}_1 = \begin{bmatrix} y_{11} \\ y_{12} \\ . \\ . \\ . \\ y_{1N} \end{bmatrix} \quad , \;\ldots\ldots\ldots\; , \quad \bar{y}_N = \begin{bmatrix} y_{N1} \\ y_{N2} \\ . \\ . \\ . \\ y_{NN} \end{bmatrix}$$

الآن بإيجاد المحدد للمصفوفة $[\bar{y}_1\bar{y}_2 \ldots \bar{y}_N]$ مستفيدين من الصيغة (2.83) وكما يأتي

$$\det(\bar{y}_1\bar{y}_2\ldots\ldots\bar{y}_N) = \det(B)\cdot\det\left(e_\alpha^{\Lambda(x-a)}\right)\cdot\det\left(B^{-1}\right)\cdot\det\left(\bar{y}_1(a)\bar{y}_2(a)\ldots\ldots\bar{y}_N(a)\right)$$

$$= \prod_{i=1}^{N} e_\alpha^{\lambda_i(x-a)} \det\begin{pmatrix} y_{11}(a)\ldots\ldots y_{N1}(a) \\ y_{12}(a)\ldots\ldots y_{N2}(a) \\ . \\ . \\ . \\ y_{1N}(a)\ldots\ldots y_{NN}(a) \end{pmatrix}$$

وبما أن جميع الدوال $e_\alpha^{\lambda_i(x-a)}$ لا تساوي الصفر إلا في مجموعة مهملة القياس من نقاط الفترة $[a,\infty)$ لذا فإن الحلول y_j تكون مستقلة خطيا دائما تقريبا إذا وفقط إذا كانت $\{\bar{y}_j(a)\}$ مستقلة خطيا ،الآن لنفرض أن $\{\bar{y}_j\}$ هي الحلول للمعادلة (2.84) والتي تحقق الشروط الابتدائية

$$\bar{y}_1(a) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ . \\ . \\ . \\ 0 \end{bmatrix} \;,\; \bar{y}_2(a) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ . \\ . \\ . \\ . \\ 0 \end{bmatrix} \;,\;\ldots\ldots\ldots,\; \bar{y}_N(a) = \begin{bmatrix} 0 \\ . \\ . \\ . \\ . \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

سنرمز لمصفوفة هذه الحلول بالشكل

$$Y = [\bar{y}_1 \bar{y}_2 \ldots\ldots \bar{y}_N]$$

$$Y(a) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ & & \cdot & \\ & & \cdot & \\ & & \cdot & \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{bmatrix} = I_{N \times N}$$

إن الحلول $\bar{y}_j$ مستقلة خطيا حسب المبرهنة (2.3) لذا فهي تشكل قاعدة (Base) لمجموعة حلول المعادلة (2.84) لأن $\{\bar{y}_j(a)\}$ هي قاعدة لكل حل $\bar{y}(a)$ ، لاحظ أن المصفوفة Y المتكونة من القاعدة $\{\bar{y}_j\}$ هي حل للمعادلة التفاضلية الخطية المتجانسة بالصيغة المصفوفية

$$\bar{D}_*^{\alpha} Y = EY \tag{2.85}$$

حيث أن

$$\bar{D}_*^{\alpha} Y = D^{\alpha}[Y - I_{N*N}] \tag{2.86}$$

وأن

$$Y(a) = I_{N*N}$$

فنسمي المصفوفة Y بالحل المصفوفي الأساسي (fundamental matrix solution) للمعادلة (2.73). ويأخذ الشكل

$$Y(x) = Be_{\alpha}^{\Lambda(x-a)}B^{-1} = B\begin{bmatrix} e_{\alpha}^{\lambda_1(x-a)} & & & & 0 \\ & \cdot & & & \\ & & \cdot & & \\ & & & \cdot & \\ & & & & \cdot \\ 0 & & & & e_{\alpha}^{\lambda_N(x-a)} \end{bmatrix}B^{-1} \tag{2.87}$$

الآن يمكن إعادة كتابة الحل $\bar{y}$ بالشكل

$$\bar{y}(x) = Y(x)\bar{y}(a) + I^{\alpha-1}\int_a^x Y(x-t+a)\bar{f}(t)dt \tag{2.88}$$

مثال 2.2 :
يمكن إعادة صياغة المعادلة التفاضلية الكسرية في المثال (2.1) إلى المنظومة الآتية:

$$y_1^{\alpha} = y_2$$
$$y_2 = 2y_1 - y_2 + \sin(x)$$

بفرض أن

$$y_2 = y^{\alpha} \quad , \quad y_1 = y$$

وحسب الصيغة الاتجاهية يكون

$$\bar{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} , \ A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} , \ \bar{f}(x) = \begin{bmatrix} 0 \\ \sin x \end{bmatrix}$$

ولإيجاد الجذور المميزة للمصفوفة A نحسب جذور متعددة الحدود

$$\det(\lambda I - A) = \begin{pmatrix} \lambda & -1 \\ -2 & \lambda + 1 \end{pmatrix} = \lambda(\lambda + 1) - 2$$
$$= \lambda^2 + \lambda - 2 = (\lambda + 2)(\lambda - 1)$$

إن جذرا متعددة الحدود هي $\lambda_1 = 1$ و $\lambda_2 = -2$.

لذا تكون صيغة الحل لهذه المنظومة هي

$$y_1 = \frac{1}{3} e_{0.5}^{x} - \frac{1}{3} e_{0.5}^{-2x} + I^{\alpha-1} \int_0^x \frac{1}{3} (e_{0.5}^{(x-t)} - 2e_{0.5}^{-2(x-t)}) \sin(t)\, dt$$

$$y_2 = \frac{1}{3} e_{0.5}^{x} + \frac{2}{3} e_{0.5}^{-2x} + I^{\alpha-1} \int_0^x \frac{1}{3} (e_{0.5}^{(x-t)} + 4e_{0.5}^{-2(x-t)}) \sin(t)\, dt$$

الفصل الثالث

استقرارية حلول المعادلات التفاضلية الكسرية

مقدمة :

في هذا الفصل سوف ندرس سلوك حلول المعادلات التفاضلية الكسرية الخطية بمعاملات ثابتة . ثم نستخدم هذه المعادلات لتقريب المعادلات التفاضلية الكسرية الخطية بمعاملات متغيرة ، ومن ثم دراسة استقراريتها . وبعد ذلك ندرس استقرارية المعادلات التفاضلية الكسرية غير الخطية بنوعيها المستقلة ذاتياً وغير المستقلة ذاتيا ، بعد تقريبها إلى معادلات تفاضلية خطية كسرية بمعاملات ثابتة.
خلال هذا الفصل سوف نتعامل مع المعادلات التفاضلية الكسرية في صيغتها الاتجاهية عندما $0 < \alpha < 1$.

البند الأول: سلوك حلول المعادلات التفاضلية الكسرية الخطية :

أولا: سلوك حلول المعادلات التفاضلية الكسرية الخطية بمعاملات ثابتة

$$\overline{D}_*^{\alpha}\overline{y} = A\overline{y} \tag{3.1}$$

$$\overline{D}_*^{\alpha}\overline{y} = A\overline{y} + \overline{f}(x) \qquad , \qquad f \in C([a,\infty)) \tag{3.2}$$

مع الشرط الابتدائي

$$\overline{y}(a) = \overline{b} \tag{3.3}$$

أ) سلوك حل المعادلة التفاضلية الكسرية الخطية المتجانسة بمعاملات ثابتة :

يعتمد سلوك الحل لهذه المعادلة على القيم المميزة λ_i للمصفوفة A التي سنفرض أنها مختلفة، وحسب الصيغ (2.87) ،(2.88) فإن كل مركبة للحل $\overline{y}$ هي تركيب خطي للدوال $e_{\alpha}^{\lambda_i (x-a)}$ ، لذا يتحدد سلوك الحل $\overline{y}$ من سلوك الدوال $e_{\alpha}^{\lambda_i (x-a)}$.

أعطى [Gorenflo2001] طرقا لحساب دالة (Mittag-Leffler) المعممة بالمعلمتين β و α باستخدام الحاسبة ، كما أعطى تقريباً لرتبة الدالة يعتمد على موقع المتغير z في المستوي المعقد ، بالشكل:

$$E_{\alpha,\beta}(z)=\frac{1}{\alpha}z^{\frac{(1-\beta)}{\alpha}}e^{z^{\frac{1}{\alpha}}}+O\left(|z|^{-1}\right) \qquad (3.5)$$

عندما $\quad , \quad 0\le|\arg(z)|<\alpha\pi\;|z|>0$

$$E_{\alpha,\beta}(z)=O\left(|z|^{-1}\right) \qquad (3.6)$$

عندما $\quad , \quad \alpha\pi\le|\arg(z)|\le\pi\;|z|>0$

إن هذه الصيغ مفيدة جدا في دراستنا لسلوك الدالة $e_{\alpha}^{\lambda x}$ ومشتقاتها والتي لها علاقة وثيقة بالدالة $E_{\alpha,\beta}(z)$ يمكن إعطائها بالشكل:

$$e_{\alpha}^{\lambda x}=\sum_{k=0}^{\infty}\lambda^{k}\frac{x^{k\alpha}}{\Gamma(k\alpha+1)}=E_{\alpha,1}\left(\lambda x^{\alpha}\right) \qquad (3.7)$$

$$D^{\beta}e_{\alpha}^{\lambda x}=\sum_{k=0}^{\infty}\lambda^{k}\frac{x^{k\alpha-\beta}}{\Gamma(k\alpha+1-\beta)}=x^{-\beta}E_{\alpha,1-\beta}\left(\lambda x^{\alpha}\right) \qquad (3.8)$$

بملاحظة الصيغ (3.5),(3.6) يمكن مباشرةً تمييز ثلاثة أنواع مختلفة لسلوك الدالة $E_{\alpha,\beta}(z)$ كما يأتي:

1) السلوك غير المستقر:

$$\left|E_{\alpha,\beta}(z)\right|\to\infty \quad , \quad |z|\to\infty \qquad (3.9)$$

في الحالتين

a) $\quad 0\le|\arg(z)|<\alpha\frac{\pi}{2} \qquad , \qquad \beta\in R$

b) $\quad |\arg(z)|=\alpha\frac{\pi}{2} \qquad , \qquad \beta<1$

2)السلوك المستقر بصورة غير محاذية :

$$\left|E_{\alpha,\beta}(z)\right| \le M < \infty \qquad , \quad |z| \to \infty \tag{3.10}$$

عندما

$$|\arg(z)| = \alpha\frac{\pi}{2} \qquad , \quad \beta = 1$$

3) السلوك المستقر بصورة محاذية:

$$\left|E_{\alpha,\beta}(z)\right| \to 0 \qquad , \quad |z| \to \infty \tag{3.11}$$

عندما

a) $\alpha\frac{\pi}{2} < |\arg(z)| \le \pi \qquad , \quad \beta \in R$

b) $|\arg(z)| = \alpha\frac{\pi}{2} \qquad , \quad \beta > 1$

إن هذه الأنواع الثلاثة تصف سلوك الدالة $E_{\alpha,\beta}(z)$ وكحالة خاصة

$$E_{\alpha,\beta}\left(\lambda x^{\alpha}\right) = e_{\alpha}^{\lambda x}$$

حيث أن $\arg(z) = \arg(\lambda)$

بما أن حل المعادلة الخطية (3.1) يأخذ الصيغة

$$\bar{y}(x) = Y(x)\bar{y}(a) = B\begin{bmatrix} e_{\alpha}^{\lambda_1(x-a)} & & & & O \\ & \cdot & & & \\ & & \cdot & & \\ & & & \cdot & \\ O & & & & e_{\alpha}^{\lambda_N(x-a)} \end{bmatrix}B^{-1}\bar{y}(a)$$

حيث Y هو حل المعادلة المصفوفية المتجانسة

$$D_*^{\alpha}Y = AY$$

مما سبق يمكن تمييز سلوك حل المعادلة (3.1) كما يلي

1) سلوك غير مستقر إذا وجدت λ_i تحقق المتباينة

$$0 \le |\arg(\lambda_i)| < \alpha \frac{\pi}{2}$$

2) سلوك مستقر إذا كانت جميع λ_i تحقق المتباينة

$$\alpha \frac{\pi}{2} \le |\arg(\lambda_i)| \le \pi$$

3) سلوك مستقر بصورة محاذية إذا كانت جميع λ_i تحقق المتباينة

$$\alpha \frac{\pi}{2} < |\arg(\lambda_i)| \le \pi$$

ب) سلوك حل المعادلة التفاضلية الكسرية الخطية غير المتجانسة بمعاملات ثابتة :

مبرهنة 3.1 :

إذا كانت حلول المعادلة الخطية المتجانسة (3.1) مقيدة وكانت

$$\left\|\bar{f}(x)\right\|_V \le K(x-a)^{-\alpha} \qquad \forall x \ge a \quad , \quad K > 0$$

فإن حلول المعادلة (3.2) تكون مقيدة (أي أنها مستقرة) .

البرهان : بما أن صيغة الحل للمعادلة (3.2) هي

$$\bar{y}(x) = Y(x)\bar{y}(a) + I^{\alpha-1}\int_a^x Y(x-t+a)\bar{f}(t)dt$$

فإن
$$\|\bar{y}(x)\|_V \le \|Y(x)\|_M \|\bar{y}(a)\|_V + I^{\alpha-1}\int_a^x \|Y(x-t+a)\|_M \|\bar{f}(t)\|_V \, dt$$

وبما أن $\|Y(x)\|_M$ مقيدة ، يوجد $C > 0$ بحيث أن $\|Y(x)\|_M \le C$

$$\|\bar{y}(x)\|_V \le C\|\bar{y}(a)\|_V + CK\, I^{\alpha}(t-a)^{-\alpha}$$

$$= C\|\bar{y}(a)\|_V + CK < \infty$$

إذن حلول المعادلة (3.2) مقيدة .

مبرهنة 3.2 :

إذا كانت حلول المعادلة الخطية المتجانسة (3.1) مستقرة بصورة محاذية وكانت

$$\|\bar{f}(x)\| \le K(x-a)^{-\epsilon} \quad , \quad \forall x > a \quad , \quad \epsilon > 0$$

فإن حل المعادلة الخطية غير المتجانسة (3.2) يكون مستقراً بصورة محاذية **.**

البرهان:

بالأسلوب نفسه للمبرهنة (3.1) فإن

$$\|\bar{y}(x)\|_V \le \|Y(x)\|_M \|\bar{y}(a)\|_V + I^{\alpha-1}\int_a^x \|y(x-t+a)\|_M \|\bar{f}(t)\|_V \, dt$$

وبما أن $Y(x)$ مستقر بصورة محاذية ، يوجد $C > 0$ بحيث $\|Y(x)\|_M \le C(x-a)^{-\alpha}$

$$\|\bar{y}(x)\|_V \le C(x-a)^{-\alpha}\|\bar{y}(a)\|_V + {}_aI_x^{\alpha}\, CK(t-a)^{-\alpha-\epsilon}$$

$$= C(x-a)^{-\alpha}\|\bar{y}(a)\|_V + CK(x-a)^{-\epsilon}$$

إذن

$$\|\bar{y}(x)\|_V \to 0 \quad , \quad x \to \infty$$

لذا فإن حلول المعادلة (3.2) مستقرة بصورة محاذية .

ثانيا / استقرارية الحل المعادلات التفاضلية الخطية بمعاملات متغيرة :

$$\bar{D}_*^{\alpha}\bar{y} = A(x)\bar{y} \tag{3.12}$$

مع الشرط الابتدائي

$$\bar{y}(a) = \bar{b} \tag{3.13}$$

إذ أن $A(x)$ دالة مصفوفية مستمرة وأن

$$A(x) \to A \quad , \quad x \to \infty$$

حيث A مصفوفة ثابتة غير منفردة لها قيم مميزة مختلفة .

لدراسة سلوك المعادلة (3.12) نعرف دالة التشويش (perturbation function) $B(x)$ بالشكل

$$B(x) = A(x) - A \quad , \quad \forall x \ge a \tag{3.14}$$

من الواضح أن $B(x)$ دالة مستمرة وأن

$$x \to 0 \quad \Rightarrow \quad B(x) \to O$$

بإمكاننا الآن تحويل المعادلة الخطية (3.12) إلى معادلة خطية غير متجانسة بمعاملات ثابتة بالشكل

$$\bar{D}_*^{\alpha}\bar{y} = A\bar{y} + B(x)\bar{y} \tag{3.15}$$

مبرهنة 3.3 :

لتكن ρ, ψ, φ دوالا غير سالبة مستمرة على الفترة $[a, \infty]$ وإذا كانت

$$\psi(x) \le K_1 (x-a)^{-\alpha} \tag{3.16}$$

$$\rho(x) \le K_2 (x-a)^{\beta} \tag{3.17}$$

$$\varphi(x) \le \rho(x) + I^{\alpha}\psi(t)\varphi(t) \tag{3.18}$$

إذ أن K_2, α , ثوابت حقيقية موجبة ، وأن ، $\beta \in R$ ، وأن

$$K_1 < \left| \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+1-\alpha)} \right|$$

فإن

$$\varphi(x) \le C(x-a)^{\beta} \qquad C \in R^{+} ،$$

البرهان:

عند تعويض الطرف الأيمن للمتباينة (3.18) بدلا عن $\varphi(t)$ في الطرف الأيمن لنفس المتباينة ينتج

$$\varphi(x) \le \rho(x) + I^{\alpha}\psi(t)\big(\rho(t) + I^{\alpha}\psi(t)\varphi(t)\big)$$
$$= \rho(x) + I^{\alpha}\psi(t)\rho(t) + I^{\alpha}\psi(t)I^{\alpha}\psi(t)\rho(t)$$

وبتكرار التعويض نفسه عن $\varphi(t)$ في الطرف الأيمن للمتباينة الناتجة إلى n من المرات ينتج

$$\phi \le \sum_{i=0}^{n} \left(I^{\alpha}\psi(t)\right)^{i} \rho(t) + \left(I^{\alpha}\psi(t)\right)^{n+1} \phi(t) \tag{3.19}$$

سنثبت أولا أن الجزء الثاني من المتباينة (3.19) يتلاشى عندما $n \to \infty$.

حسب المتباينة (3.16) ينتج

$$\left(I^{\alpha}\psi(t)\right)^{n}\varphi(t)\leq\left(I^{\alpha}K_{1}(t-a)^{-\alpha}\right)^{n}\varphi(t) \tag{3.20}$$

لتكن M الدالة المعرفة بالشكل

$$M(x)=\sup_{t\in[a,x]}\{\varphi(t)\}$$

وبما أن الدالة φ مستمرة على الفترة $[a,x]$ لكل $x>a$ فإنها تكون مقيدة على الفترة نفسها وهذا يعني أن الدالة $M(x)$ موجودة لكل $x\geq a$ ، لذا فإن

$$\left({}_{a}^{x}I^{\alpha}\psi(t)\right)^{n}\varphi(t)\leq K_{1}^{n}M(x)\left(I^{\alpha}(x-a)^{-\alpha}\right)^{n}\cdot 1$$

$$=K_{1}^{n}M(x)$$

وبما أن $0<K_{1}<1$ فإن $\left(I^{\alpha}\psi(t)\right)^{n}\varphi(t)$ يتلاشى عندما $n\to\infty$.

وحسب المتباينتين (3.16),(3.17) فإن

$$\varphi\leq\sum_{i=0}^{n}\left(I^{\alpha}\psi(t)\right)^{i}\rho(t)\leq\sum_{i=0}^{n}\left(K_{1}I^{\alpha}(t-a)^{-\alpha}\right)^{i}K_{2}(t-a)^{\beta}$$

$$=K_{2}\sum_{i=0}^{n}K_{1}^{i}\left|\frac{\Gamma(\beta+1-\alpha)}{\Gamma(\beta+1)}\right|^{i}(x-a)^{\beta}=C(x-a)^{\beta}$$

حيث

$$C=\frac{K_{2}}{1-K_{1}\left|\frac{\Gamma(\beta+1-\alpha)}{\Gamma(\beta+1)}\right|}$$

وبهذا تتحقق المبرهنة .

سندرس الآن سلوك الحل للمعادلة (3.15)

مبرهنة 3.4 :

إذا كانت حلول المعادلة التفاضلية الكسرية الخطية

$$\overline{D}_*^{\alpha}\bar{y}(x) = A\bar{y}(x) \qquad (3.21)$$

مقيدة ، وكانت

$$\|B(x)\|_M < \frac{K}{C}\frac{(x-a)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} \quad , \quad \forall x > a \qquad (3.22)$$

حيث K ثابت حقيقي وأن $0 < K < 1$ ، C ثابت موجب مناسب ، فإن حلول المعادلـة (3.15) مقيدة (أي أنـها مستقرة).

البرهان:

بما أن حل المعادلة (3.15) يأخذ الصيغة

$$\bar{y}(x) = Y(x)\bar{y}(a) + I^{\alpha-1}\int_a^x Y(x-t+a)B(t)\bar{y}\,dt$$

فإن

$$\|\bar{y}(x)\|_V \le \|Y(x)\|_M \|\bar{y}(a)\|_V + I^{\alpha-1}\int_a^x \|Y(x-t+a)\|_M \|B(t)\|_M \|\bar{y}(t)\|_V\,dt$$

وبما أن حلول المعادلة (3.21) مقيدة يوجد عدد حقيقي موجب $1 \le C$ بحيث أن

$$\|Y(x)\|_M \le C \qquad \forall x \ge a$$

بما أن $K < 1$ فيوجد $N \in Z^+$ بحيث أن

$$K \le \frac{N-1}{N}$$

وحسب المتباينة (3.22) فإن

$$\|\bar{y}(x)\|_V \le C\|\bar{y}(a)\|_V + C\frac{K}{C} I^{\alpha-1}\int_a^x \frac{(x-t)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}\|\bar{y}(t)\|_V dt$$

$$\le C\|\bar{y}(a)\|_V + \frac{N-1}{N} I^{\alpha-1}\int_a^x \frac{(x-t)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}\|\bar{y}(t)\|_V dt \qquad (3.23)$$

ندعي الآن أن الدالة $\|\bar{y}(x)\|_V$ مقيدة بالعدد $CN\|\bar{y}(a)\|_V$

نفرض العكس ، فيوجد $a < x_1$ بحيث أن

$$\|\bar{y}(x_1)\|_V > CN\|\bar{y}(a)\|_V$$

وبما أن الدالة $\bar{y}(x)$ مستمرة فإن الدالة $\|\bar{y}(x)\|_V$ مستمرة و بالتالي تحقق خاصية القيمة المتوسطة ، لذلك يوجد $a < x_2$ بحيث أن

$$\|\bar{y}(x_2)\|_V = CN\|\bar{y}(a)\|_V \qquad (3.24)$$

لتكن $a < x_o$ هي أول قيمة تحقق الخاصية (3.24) أي أن

$$\|\bar{y}(x)\|_V < CN\|\bar{y}(a)\|_V \qquad , \quad \forall a < x < x_o$$

وحسب المتباينة (3.23) ينتج

$$CN\|\bar{y}(a)\|_V = \|\bar{y}(x_o)\|_V \le C\|\bar{y}(a)\|_V + \frac{N-1}{N} {}_a^{x_o}I^{\alpha-1}\int_a^x \frac{(x-t)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}\|\bar{y}(t)\|_V dt$$

$$< C\|\bar{y}(a)\|_V + \frac{N-1}{N} CN\|\bar{y}(a)\|_V \, {}_a^{x_o}I^{\alpha-1} \frac{(x-a)^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)}$$

$$\|\bar{y}(x)\|_V = C\|\bar{y}(a)\|_V + C(N-1)\|\bar{y}(a)\|_V$$

$$= CN\|\bar{y}(a)\|_V$$

إذن

$$CN\|\bar{y}(a)\|_V < CN\|\bar{y}(a)\|_V$$

وهذا تناقض ، لذا فإن x_o غير موجود أي أن

$$\|\bar{y}(x)\|_V < CN\|\bar{y}(a)\|_V \qquad , \quad \forall \; x > a$$

وبهذا تكون حلول المعادلة (3.15) مقيدة .

مبرهنة 3.5:

إذا كانت حلول المعادلة

$$\overline{D}_*^{\alpha}\bar{y}(x) = A\bar{y}(x)$$

مستقرة بصورة محاذية وكانت

$$\|B(x)\|_M < K/C$$

حيث C ثابت موجب مناسب وأن $0 < K < 1$ ، فإن حلول المعادلة (3.15) مستقرة بصورة محاذية .

البرهان:

بما أن حلول المعادلة (3.15) تأخذ الصيغة

$$\bar{y}(x) = Y(x)\bar{y}(a) + I^{\alpha-1}\int_a^x Y(x-t+1)B(t)\bar{y}(t)\,dt$$

فإن

$$\|\bar{y}(x)\|_V \le \|Y(x)\|_M \|\bar{y}(a)\|_V$$

$$+ I^{\alpha-1}\int_a^x \|Y(x-t+a)\|_M \|B(t)\|_M \|\bar{y}(t)\|_V \,dt \qquad (3.25)$$

وبما أن حلول المعادلة (3.24) مستقرة بصورة محاذية فحسب الصيغة (3.1) يوجد $C > 1$ بحيث أن

$$\|Y(x)\|_M \le C \frac{(x-a)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} \tag{3.26}$$

وبما أن $K < 1$ فيوجد عدد صحيح موجب N بحيث أن

$$K \le \frac{N-1}{N}$$

ندعي أن الدالة $\|\bar{y}(x)\|_V$ مقيدة بالعدد $CN\|\bar{y}(a)\|_V$.

لنفرض العكس ، فيوجد $a < x_1$ بحيث أن

$$\|\bar{y}(x_1)\|_V > CN\|\bar{y}(a)\|_V$$

وبما أن الدالة $\bar{y}(x)$ مستمرة فإن الدالة $\|\bar{y}(x)\|_V$ مستمرة و بالتالي تحقق خاصية القيمة المتوسطة لذا يوجد $a < x_2$ بحيث أن

$$\|\bar{y}(x_2)\|_V = CN\|\bar{y}(a)\|_V \tag{3.27}$$

لتكن x_o أول قيمة تحق الخاصية (3.27) أي أن

$$\|\bar{y}(x)\|_V < CN\|\bar{y}(a)\|_V \qquad , \qquad \forall a \le x < x_o$$

وحسب المتباينة (3.25) ينتج

$$CN\|\bar{y}(a)\|_V = \|\bar{y}(x_o)\|_V \le C\|\bar{y}(a)\|_V + {}_a^{x_o}I^{\alpha-1} \int_a^x \|Y(x-t+a)\|_M \|B(t)\|_M \|\bar{y}(t)\|_V dt$$

$$\le C\|\bar{y}(a)\|_V + C\frac{N-1}{N} {}_a^{x_o}I^{\alpha-1} \int_o^x \frac{(x-t)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} \|\bar{y}(t)\|_V dt$$

$$< C\|\bar{y}(a)\|_V + C\frac{N-1}{CN} CN\|\bar{y}(a)\|_V \, {}_a^{x_o}I^{\alpha-1} \frac{(x-a)^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)}$$

أي أن

$$
\begin{aligned}
CN\|\bar{y}(a)\|_V &< C\|\bar{y}(a)\|_V + (N-1)\|\bar{y}(a)\|_V \\
&= CN\|\bar{y}(a)\|_V
\end{aligned}
$$

إذن

$$
CN\|\bar{y}(a)\|_V < CN\|\bar{y}(a)\|_V
$$

وهذا تناقض لذا فإن x_o غير موجودة ، أي أن

$$
\|\bar{y}(x)\|_V \le CN\|\bar{y}(a)\|_V
$$

ولبرهان أن $\bar{y}(x)$ مستقرة بصورة محاذية ، فمن المتباينة (٣,٢٥) نجد أن

$$
\begin{aligned}
\|\bar{y}(x)\|_V &\le C\frac{(x-a)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}\|\bar{y}(a)\|_V + I^{\alpha-1}\int_a^x C\frac{(x-a)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{K}{C}\|\bar{y}(t)\|_V dt \\
&= C\frac{(x-a)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}\|\bar{y}(a)\|_V + I^{\alpha-1}I^{1-\alpha}K\|\bar{y}(x)\|_V \\
&= C\frac{(x-a)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}\|\bar{y}(a)\|_V + K\|\bar{y}(x)\|_V
\end{aligned}
$$

إذن

$$
(1-K)\ \|\bar{y}(x)\|_V \le C\frac{(x-a)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}\|\bar{y}(a)\|_V
$$

وبما إن $k < 1$ فإن

$$
\|\bar{y}(x)\| \le C_1(x-a)^{-\alpha} \qquad , \quad \forall\, x > a
$$

حيث أن C_1 ثابت موجب مناسب ،وهذا يعني أن حلول المعادلة (3.15) مستقرة بصورة محاذية .

البند الثاني :استقرارية حلول المعادلات التفاضلية غير الخطية .

أولا: استقرارية حلول المعادلات التفاضلية غير الخطية المستقلة ذاتياً (autonomous) .

سنتناول المعادلة التفاضلية غير الخطية المستقلة ذاتياً من الصيغة:

$$\bar{D}_*^{\alpha}\bar{y}(x)=\bar{f}\left(\bar{y}(x)\right) \qquad (3.28)$$

حيث $\bar{y}(x)$ دالة مستمرة على الفترة $[a,\infty)$ ،

وسنتطرق في البداية إلى استقرارية المعادلة عند الحلول الشاذة .

ليكن $\bar{y}_*$ حلا شاذا للمعادلة (3.28) أي أن

$$\bar{D}_*^{\alpha}\bar{y}_*(x)=\bar{f}\left(\bar{y}_*(x)\right)=\bar{0}$$

لتكن A مصفوفة ثابتة غير منفردة ، وليكن $\bar{y}$ حلا آخر للمعادلـة (3.28) ، نعرف دالـة الفرق $\bar{f}_*$ بالشكل :

$$\bar{f}_*\left(\bar{y}(x)\right)=\bar{f}\left(\bar{y}(x)\right)-A\left(\bar{y}(x)-\bar{y}_*(x)\right) \qquad (3.29)$$

فإذا أمكن اختيار المصفوفة A بحيث

$$\lim_{\bar{y}\to\bar{y}_*}\frac{\left\|\bar{f}_*(\bar{y})\right\|_V}{\left\|\bar{y}-\bar{y}_*\right\|_V}=0 \qquad (3.30)$$

فيمكن كتابة المعادلة (3.28) بالصيغة :

$$\bar{D}_*^{\alpha}\bar{y}(x)=A\left(\bar{y}(x)-\bar{y}_*(x)\right)+\bar{f}_*\left(\bar{y}(x)\right)$$

و حسب التعريف (1.15) فإن

$$\bar{D}_*^{\alpha}\bar{y}(x)=A\left(\bar{y}(x)-\bar{y}_*(x)\right)+o\left(\left\|\bar{y}(x)-\bar{y}_*(x)\right\|_V\right) \qquad (3.31)$$

يسمى الشرط (3.30) بشرط اللاخطية (non-linearity condition)، وتسمى المعادلة

$$\overline{D}_*^{\alpha}\bar{y}(x)=A(\bar{y}(x)-\bar{y}_*(x)) \qquad (3.32)$$

تقريبا خطيا للمعادلة (3.28) . وإذا عرفنا دالة التشويش $\bar{z}(x)$ بالشكل

$$\bar{z}(x)=\bar{y}(x)-\bar{y}_*(x)$$

فيمكن اعادة صياغة المعادلة (3.29) بالشكل

$$\overline{D}_*^{\alpha}\bar{z}(x)=A\bar{z}(x)+\bar{f}_*(\bar{z}(x)+\bar{y}_*(x)) \qquad (3.33)$$

ويأخذ شرط اللاخطية الشكل

$$\lim_{\bar{z}\to\bar{0}}\frac{\left\|\bar{f}_*(\bar{z}+\bar{y}_*)\right\|_V}{\left\|\bar{z}\right\|_V}=0 \qquad (3.34)$$

أما التقريب الخطي للمعادلة (3.33) فيأخذ الصيغة

$$\overline{D}_*^{\alpha}\bar{z}(x)=A\bar{z}(x)$$
(3.35)

ومن الواضح أن الدالة $\bar{z}=\bar{0}$ يمثل حلا شاذا للمعادلتين (3.33) , (3.35) .

مبرهنة 3.6 :

إذا كانت المعادلة (3.32) مستقرة بصورة محاذية عند الحل الشاذ $\bar{y}_*$ ووجدت $\delta>0$ بحيث

$$\left\|\bar{y}-\bar{y}_*\right\|_V<\delta \quad\Rightarrow\quad \left\|\bar{f}_*(\bar{y})\right\|_V<\frac{K}{C}\left\|\bar{y}-\bar{y}_*\right\|_V \qquad (3.36)$$

حيث $0<K<1$ و $C>0$ ثابت مناسب يعتمد على المصفوفة A فإن المعادلة (3.28) مستقرة بصورة محاذية عند الحل الشاذ $\bar{y}_*$.

البرهان :

سيتم برهان المبرهنة اعتماداً على الصيغ المكافئة (3.33) , (3.35) ،
حيث يمكن إعادة صياغة الشرط (3.36) بالشكل :

$$\|\bar{z}\|_V \le \delta \quad \Rightarrow \quad \|\bar{f}_*(\bar{z}+\bar{y}_*)\|_V \le \frac{K}{C}\|\bar{z}\|_V \tag{3.37}$$

بما أن المعادلة (3.32) مستقرة بصورة محاذية عند الحل الشاذ $\bar{y}_*$ فإن المعادلة (3.35) مستقرة بصورة محاذية عند الحل الشاذ $\bar{z}=\bar{0}$ ، وهذا يعني أن الحل الأساسي للمعادلة المصفوفية

$$D_*^{\alpha}Z(x) = AZ(x)$$

مستقر بصورة محاذية .

وحسب المبرهنة (3.1) و التعريف (3.14) يوجد $C>0$. بحيث أن

$$\|Z(x)\|_M \le C\frac{(x-a)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} \qquad ,\forall\ x>a \tag{3.38}$$

وبما أن حل المعادلة (3.33) يحقق الصيغة

$$\bar{z}(x) = Z(x)\bar{z}(a) + I^{\alpha-1}\int_a^x Z(x-t+a)\bar{f}_*(\bar{z}(t)+\bar{y}_*(t))dt$$

فإن

$$\|\bar{z}(x)\|_V \le \|Z(x)\|_M\|\bar{z}(a)\|_V$$

$$+ I^{\alpha-1}\int_a^x \|Z(x-t+a)\|_M\|\bar{f}_*(\bar{z}(t)+\bar{y}(t))\|_V dt \tag{3.39}$$

بما أن $0<K<1$ ، يوجد عدد صحيح موجب N بحيث أن

$$K \le \frac{N-1}{N} \tag{3.40}$$

ندعي بأن الدالة $\|\bar{z}(x)\|_V$ مقيدة بالعدد $CN\|\bar{z}(a)\|_V$ لكل $x > a$

لنفرض العكس ، يوجد $a < x_1$ بحيث

$$\|\bar{z}(x_1)\|_V > CN\|\bar{z}(a)\|_V$$

وبما أن الدالة $\bar{z}(x)$ مستمرة فإن الدالة $\|\bar{z}(x_2)\|_V$ مستمرة و بالتالي تحقق خاصية القيمة المتوسطة لذا يوجد $x_2 > a$ بحيث أن :

$$\|\bar{z}(x_2)\|_V = CN\|\bar{z}(a)\|_V \tag{3.41}$$

لتكن x_o أول قيمة تحقق الخاصية (3.41) أي أن

$$\|\bar{z}(x)\|_V < CN\|\bar{z}(a)\|_V \qquad , \qquad \forall a \le x < x_o \tag{3.42}$$

الآن حسب الشرط (3.37) والمتباينات (3.38) و (3.39) ينتج

$$CN\|\bar{z}(a)\|_V = \|\bar{z}(x_o)\|_V \le C\|\bar{z}(a)\|_V + \overset{x_o}{\underset{a}{I}}{}^{\alpha-1} \int_a^x C\frac{(x-t)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}\|\bar{f}_*(\bar{z}(t)+\bar{y}_*(t))\|_V dt$$

لتكن

$$\|\bar{z}(a)\|_V = \frac{\delta}{CN} \tag{3.43}$$

فإن

$$\|\bar{z}(x_0)\|_V = \delta \tag{3.44}$$

وحسب الشرط (3.37) والمتباينة (3.40) والعلاقة (3.44)

$$CN\|\bar{z}(a)\|_V \le \frac{CN\|\bar{z}(a)\|_V}{N} + C\frac{K}{C}\overset{x_o}{\underset{a}{I}}{}^{\alpha-1} \int_a^x \frac{(x-t)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}\|\bar{z}(x_o)\|_M dt$$

لذلك فإن

$$\delta < \frac{\delta}{N} + \frac{N-1}{N}\delta \, {}_{a}^{x_o}I^{\alpha-1} \frac{(x-t)^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} \quad = \delta$$

إذن $\delta < \delta$ وهذا تناقض لذا فإن x_o غير موجودة . أي أن

$$\|\bar{z}(a)\|_V \leq \frac{\delta}{CN} \qquad \Rightarrow \|\bar{z}(x)\|_V < \delta$$

ولبرهان أن الحل الشاذ $\bar{z} = \bar{0}$ مستقر بصورة محاذية نلاحظ أن

$$\begin{aligned} \|\bar{z}(x)\|_V &\leq C\frac{(x-a)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}\|\bar{z}(a)\|_V + I^{\alpha-1}\int_a^x C\frac{(x-a)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{K}{C}\|\bar{z}(t)\|_V dt \\ &= C\frac{(x-a)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}\|\bar{z}(a)\|_V + I^{\alpha-1}I^{1-\alpha}K\|\bar{z}(t)\|_V \\ &= C\frac{(x-a)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}\|\bar{z}(a)\|_V + K\|\bar{z}(x)\|_V \end{aligned}$$

إذن

$$(1-K)\ \|\bar{z}(x)\|_V \leq C\frac{(x-a)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}\|\bar{z}(a)\|_V$$

وبما أن $k < 1$ فإن

$$\|\bar{z}(x)\| \leq C_1(x-a)^{-\alpha} \qquad , \quad \forall x > a$$

حيث أن C_1 ثابت حقيقي موجب ، أي أن

$$\bar{z}(x) \longrightarrow \bar{0} \quad , \quad x \longrightarrow \infty$$

لذا فالمعادلة (3.33) مستقرة بصورة محاذية عند الحل الشاذ $\bar{z} = \bar{0}$ ، أي أن المعادلة (3.28) مستقرة بصورة محاذية عند الحل الشاذ $\bar{y}_*$.

ملاحظة (١) : إن شرط الاستقرارية المحاذية لحلول معادلة التقريب الخطي (3.32) ضروري حتى عند اثبات أن الحلول مقيدة .

ملاحظة (٢) : أما استقرارية المعادلة (3.28) عند الحلول غير الشاذة فيمكن دراستها من خلال المبرهنات السابقة باستخدام الفرضية الآتية :

إذا كان $\bar{y}_*$ حلا غير شاذ للمعادلة (3.28) وكان $\bar{y}$ حلا آخر للمعادلة نفسها ، نعرف دالة التشويش $\bar{z}(x)$ بالشكل :

$$\bar{z}(x) = \bar{y}_*(x) - \bar{y}(x) \tag{3.45}$$

والتي تحقق المعادلة

$$\bar{D}_*^{\alpha} z(x) = \bar{f}(\bar{y}_*(x)) - \bar{f}(\bar{y}_*(x) - \bar{z}(x)) = \bar{f}_*(\bar{z}(x)) \tag{3.46}$$

ومن الواضح أن الدالة $\bar{f}_*(\bar{z}(x))$ تتلاشى عندما $\bar{z}(x) = \bar{0}$ ، لذا فإن $\bar{z} = \bar{0}$ يمثل حلا شاذا للمعادلة (3.46).

وهكذا فإن حل المعادلة (3.28) $\bar{y}_*$ يكون مستقرا إذا وفقط إذا كان الحل الشاذ للمعادلة (3.46) $\bar{z} = 0$ مستقرا.

ثانيا:إستقرارية حلول المعادلات التفاضلية غير الخطية غير المستقلة ذاتياً (Nonotonomous) :

سنتناول المعادلة من الصيغة

$$\bar{D}_*^{\alpha} \bar{y}(x) = \bar{f}(x, \bar{y}(x)) \tag{3.47}$$

وسنتطرق في البداية إلى إستقرارية هذه المعادلة عند الحلول الشاذة .

ليكن $\bar{y}_*$ حلا شاذا للمعادلة (3.47) أي أن

$$\bar{D}_*^{\alpha} \bar{y}_*(x) = \bar{f}(x, \bar{y}(x)) = \bar{0}$$

ولتكن A مصفوفة ثابتة غير منفردة ، وليكن $\bar{y}$ حلا آخر للمعادلة (3.47) نعرف دالة الفرق بالشكل :

$$\bar{f}_*(x, \bar{y}(x)) = \bar{f}(x, \bar{y}(x)) - A(\bar{y}(x) - \bar{y}_*(x)) \tag{3.48}$$

وإذا أمكن اختيار المصفوفة A بحيث

$$\lim_{\bar{y}\to\bar{y}_*}\frac{\left\|\bar{f}_*(x,\bar{y})\right\|_V}{\left\|\bar{y}-\bar{y}_*\right\|_V}=0 \tag{3.49}$$

فيمكن كتابة المعادلة (3.47) بالصيغة

$$\overline{D}_*^{\alpha}\bar{y}(x)=A\left(\bar{y}(x)-\bar{y}_*(x)\right)+\bar{f}_*\left(x,\bar{y}(x)\right) \tag{3.50}$$

$$\Rightarrow \overline{D}_*^{\alpha}\bar{y}(x)=A\left(\bar{y}(x)-\bar{y}_*(x)\right)+O\left(\left\|\bar{y}(x)-\bar{y}_*(x)\right\|_V\right) \tag{3.51}$$

يسمى الشرط (3.49) بشرط اللاخطية وتسمى المعادلة

$$\overline{D}_*^{\alpha}\bar{y}(x)=A\left(\bar{y}(x)-\bar{y}_*(x)\right) \tag{3.52}$$

تقريبا خطيا للمعادلة (3.47) .

وإذا عرفنا دالة التشويش $\bar{z}(x)$ بالشكل

$$\bar{z}(x)=\bar{y}(x)-\bar{y}_*(x) \tag{3.53}$$

فيمكن اعادة صياغة المعادلة (3.50) بالشكل

$$\overline{D}_*^{\alpha}\bar{z}(x)=A\bar{z}(x)+\bar{f}_*\left(x,\bar{z}(x)+\bar{y}_*(x)\right) \tag{3.54}$$

كما يأخذ الشرط (3.49) الشكل

$$\lim_{\bar{z}\to 0}\frac{\left\|\bar{f}_*(x,\bar{z}+\bar{y}_*)\right\|_V}{\left\|\bar{z}\right\|_V}=0 \tag{3.55}$$

أما التقريب الخطي فيأخذ الصيغة :

$$\overline{D}_*^{\alpha}\bar{z}(x)=A\bar{z}(x) \tag{3.56}$$

مبرهنة 3.7 :

إذا كانت المعادلة (3.52) مستقرة عند الحل الشاذ $\bar{y}_*$ وجدت $\delta > 0$ بحيث

$$\left\|\bar{y}-\bar{y}_*\right\|_V \le \delta \Rightarrow \left\|\bar{f}_*(x,\bar{y})\right\|_V \le \frac{K}{M(x)} \; \frac{(x-a)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}\left\|\bar{y}-\bar{y}_*\right\|_V \qquad (3.57)$$

حيث $0 < K < 1$ و $M(x)$ دالة موجبة مقيدة تعتمد على المصفوفة A فإن المعادلة (3.47) مستقرة عند الحل الشاذ $\bar{y}_*$.

البرهان :

سيتم برهان المبرهنة اعتماداً على الصيغ المكافئة (3.54) و(3.56) ،

حيث يمكن إعادة صياغة الشرط (3.57) بالشكل :

$$\left\|\bar{z}\right\|_V \le \delta \quad \Rightarrow \left\|\bar{f}_*(x,\bar{z}+\bar{y}_*)\right\|_V \le \frac{K}{C} \; \frac{(x-a)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}\left\|\bar{z}\right\|_V \qquad (3.58)$$

بما أن المعادلة (3.52) مستقرة عند الحل الشاذ $\bar{y}_*$ فإن المعادلة (3.56) مستقرة عند الحل الشاذ $\bar{z} = \bar{0}$ وهذا يعني أن الحل الاساسي للمعادلة المصفوفية

$$D_*^{\alpha}Z(x) = AZ(x)$$

مقيد ولنفرض أن

$$\left\|Z(x)\right\|_M \le C \qquad , \qquad \forall\, x \ge a \qquad (3.59)$$

حيث $C > 1$ ثابت حقيقي موجب نعرف الدالة $M(x)$ بالشكل

$$M(x) = \frac{1}{\left\|Z(x)\right\|_M} \qquad (3.60)$$

لكل $x > a$ بحيث أن

$$\left\|Z(x)\right\|_M \ne 0$$

وبما أن $0 < K < 1$ فيوجد عدد صحيح موجب N بحيث أن

$$K \le \frac{N-1}{N} \tag{3.61}$$

ندعي أن الدالة $\|\bar{z}(x)\|_V$ مقيدة بالعدد $CN\|\bar{z}(a)\|_V$ لكل $x > a$.

لنفرض العكس ، يوجد عدد $a < x_1$ بحيث أن

$$\|\bar{z}(x_1)\|_V > CN\|\bar{z}(a)\|_V$$

وبما أن الدالة $\bar{z}(x)$ مستمرة فإن الدالة $\|\bar{z}(x)\|_V$ مستمرة و بالتالي تحقق خاصية القيمة المتوسطة لذلك يوجد $x_2 > a$ بحيث أن

$$\|\bar{z}(x_2)\|_V = CN\|\bar{z}(a)\|_V \tag{3.62}$$

لتكن x_o أول قيمة تحقق الخاصية (3.62) أي أن:

$$\|\bar{z}(x)\|_V < CN\|\bar{z}(a)\|_V \quad , \quad \forall a < x < x_o \tag{3.63}$$

بما أن حل العادلة (3.54) يحقق الصيغة

$$\bar{z}(x) = Z(x)\bar{z}(a) + I^{\alpha-1}\int_a^x Z(x-t+a)\bar{f}_*(t, \bar{z}(t) + \bar{y}_*(t))dt$$

$$\Rightarrow \|\bar{z}(x)\|_V \le \|Z(x)\|_M \|\bar{z}(a)\|_V$$

$$+ I^{\alpha-1}\int_a^x \|Z(x-t+a)\|_M \|\bar{f}_*(t, \bar{z}(t) + \bar{y}_*(t))\|_V dt \tag{3.65}$$

وحسب التعريف (3.60) والمتباينتين (3.59) , (3.65) فإن

$$CN\|\bar{z}(a)\|_V = \|\bar{z}(x_o)\|_V \le C\|\bar{z}(a)\|_V + I^{\alpha-1}\int_a^x M(x-t+a)\|\bar{f}_*(t, \bar{z}(t) + \bar{y}_*(t))\|_V dt$$

لتكن

$$\|\bar{z}(a)\|_V = \frac{\delta}{CN}$$

فإن

$$\|\bar{z}(x_o)\|_V = \delta \tag{3.64}$$

وحسب المتباينتين (3.63) , (3.64) والشرط (3.58) فإن

$$CN\|\bar{z}(a)\|_V < C\|\bar{z}(a)\|_V + I_a^{x_o\,\alpha-1} \int_a^x M(x-t+a)\frac{K}{M(x-t+a)} \frac{(t-a)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}\|\bar{z}(x_o)\|_V dt$$

$$\delta < C\|\bar{z}(a)\|_V + \frac{N-1}{N}CN\|\bar{z}(a)\|_V + I_a^{x_o\,\alpha-1}\frac{(x-a)^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)}$$

وحسب المتباينة (3.61) فإن

$$\delta < \frac{\delta}{N} + (N-1)\delta = \delta$$

وهذا تناقض ، لذا فإن x_o غير موجود . وهذا يعني أن المعادلة (3.54) مستقرة عند الحل الشاذ $\bar{z} = \bar{0}$ ويؤدي إلى أن المعادلة (3.47) مستقرة عند الحل الشاذ $\bar{y}_*$.

مبرهنة 3.8 :

إذا كانت المعادلة (3.52) مستقرة بصورة محاذية عند الحل الشاذ $\bar{y}_*$ ووجدت $\delta > 0$ بحيث أن :

$$\|\bar{y} - \bar{y}_*\|_V < \delta \qquad \Rightarrow \|\bar{f}_*(x,\bar{y})\|_V < \frac{K}{C}\|\bar{y} - \bar{y}_*\|_V \tag{3.66}$$

حيث $0 < K < 1$, $C > 0$ ثابت مناسب يعتمد على المصفوفة A ، فإن المعادلة (3.47) مستقرة بصورة محاذية عند الحل الشاذ $\bar{y}_*$.

البرهان:

سيتم برهان المبرهنة اعتماداً على الصيغ المكافئة (3,54) , (3.56) ، حيث يمكن إعادة صياغة الشرط (3.66) بالشكل :

$$\|\bar{z}\|_V \le \delta \qquad \Rightarrow \left\|\bar{f}_*(x, \bar{z} + \bar{y}_*)\right\|_V \le \frac{K}{C}\|\bar{z}\|_V \tag{3.67}$$

بما أن المعادلة (3.32) مستقرة بصورة محاذية عند الحل الشاذ $\bar{y}_*$ فإن المعادلة (3.56) مستقرة بصورة محاذية عند الحل الشاذ $\bar{z} = \bar{0}$ وهذا يعني أن الحل الأساسي للمعادلة المصفوفية

$$D_*^\alpha Z(x) = AZ(x)$$

مستقر بصورة محاذية ، وحسب المبرهنة (3.1) يوجد $C > 0$ بحيث أن

$$\|Z(x)\|_M \le C\frac{(x-a)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} \tag{3.68}$$

وبما أن $0 < K < 1$ ، يوجد عدد صحيح موجب N بحيث

$$K \le \frac{N-1}{N} \tag{3.69}$$

وبما أن حل المعادلة (3.54) يحقق الصيغة

$$\bar{z}(x) = Z(x)\bar{z}(a) + I^{\alpha-1}\int_a^x Z(x-t+a)\bar{f}_*(t, \bar{z}(t) + \bar{y}_*(t))dt$$

$$\Rightarrow \|\bar{z}(x)\|_V = \|Z(x)\|_M\|\bar{z}(a)\|_V$$

$$+ I^{\alpha-1}\int_a^x \|Z(x-t+a)\|_M\left\|\bar{f}_*(t, \bar{z}(t) + \bar{y}_*(t))\right\|_V dt \tag{3.70}$$

ندعي بأن الدالة $\|\bar{z}(x)\|_V$ مقيدة بالعدد $CN\|\bar{z}(a)\|_V$ لكل $x > a$

لنفرض العكس ، يوجد $x_1 > a$ بحيث أن

$$\|\bar{z}(x_1)\|_V > CN\|\bar{z}(a)\|_V$$

وبما أن الدالة $\bar{z}(x)$ مستمرة فإن الدالة $\|\bar{z}(x)\|_V$ مستمرة و بالتالي تحقق خاصية القيمة المتوسطة لذا يوجد $x_2 > a$ بحيث أن:

$$\|\bar{z}(x_2)\|_V = CN\|\bar{z}(a)\|_V \tag{3.71}$$

لتكن x_o أول قيمة تحقق الخاصية (3.69) ، فإن

$$\|\bar{z}(x)\|_V < CN\|\bar{z}(a)\|_V \qquad \forall\, a \le x < x_o \tag{3.72}$$

الآن حسب العلاقات (3.68) , (3.70) , (3.74) فإن

$$CN\|\bar{z}(a)\|_V = \|Z(x_o)\|_V \le C\|\bar{z}(a)\|_V$$
$$+ \overset{x_o}{\underset{a}{I}}{}^{\alpha-1} \int_a^x \frac{C(x-t)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} \|\bar{f}_*(t, \bar{z}(x) + \bar{y}_*(x))\|_V \, dt$$

لتكن

$$\|\bar{z}(a)\|_V = \frac{\delta}{CN} \tag{3.73}$$

فإن

$$\|\bar{z}(x_o)\|_V = \delta \tag{3.74}$$

وحسب العلاقة (3.74) والشرط (3.67) فإن

$$CN\|\bar{z}(a)\|_V \le C\|\bar{z}(a)\|_V + C\frac{K}{C} \overset{x_o}{\underset{a}{I}}{}^{\alpha-1} \int_a^x \frac{(x-t)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} \|\bar{z}(t)\|_V \, dt$$

وحسب العلاقات (3.69) , (3.72) فإن

$$CN\|\bar{z}(a)\|_V < C\|\bar{z}(a)\|_V + \frac{N-1}{N}\|\bar{z}(x_o)\| \overset{x_o}{\underset{a}{I}}{}^{\alpha-1} \frac{(x-a)^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)}$$

لذا نحصل على

$$\delta < \frac{\delta}{N} + \frac{N-1}{N}\delta = \delta$$

وهذا تناقض لذا فإن x_o غير موجودة ، أي أن

$$\|\bar{z}(a)\|_V \leq \frac{\delta}{CN} \qquad \Rightarrow \quad \|\bar{z}(x)\|_V < \delta$$

ولبرهان أن الحل الشاذ $\bar{z} = \bar{0}$ مستقر بصورة محاذية نلاحظ أن

$$\begin{aligned}
\|\bar{z}(x)\|_V &\leq C\frac{(x-a)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}\|\bar{z}(a)\|_V + I^{\alpha-1}\int_a^x C\frac{(x-a)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{K}{C}\|\bar{z}(t)\|_V dt \\
&= C\frac{(x-a)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}\|\bar{z}(a)\|_V + I^{\alpha-1}I^{1-\alpha}K\|\bar{z}(t)\|_V \\
&= C\frac{(x-a)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}\|\bar{z}(a)\|_V + K\|\bar{z}(x)\|_V
\end{aligned}$$

إذن

$$(1-K)\ \|\bar{z}(x)\|_V \leq C\frac{(x-a)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}\|\bar{z}(a)\|_V$$

وبما أن $k < 1$ فإن

$$\|\bar{z}(x)\|_V \leq C_1(x-a)^{-\alpha}$$

حيث C_1 ثابت حقيقي موجب ، أي أن

$$\bar{z}(x) \longrightarrow \bar{0} \quad , \quad x \longrightarrow \infty$$

لذا فالمعادلة (3.56) مستقرة بصورة محاذية عند الحل الشاذ $\bar{z} = \bar{0}$ وهذا يؤدي إلى أن المعادلة (3.47) مستقرة بصورة محاذية عند الحل الشاذ $\bar{y}_*$

ملاحظة (٣) : أما استقرارية المعادلة (3.47) عند الحلول غير الشاذة فيمكن دراستها من خلال المبرهنات السابقة باستخدام الفرضية التالية :

إذا كان $\bar{y}_*$ حلا غير شاذ للمعادلة (3.47) وكان $\bar{y}$ حلا مجاورا للحل $\bar{y}_*$ ، نعرف دالة التشويش $\bar{z}(x)$ بالشكل

$$\bar{z}(x) = \bar{y}_*(x) - \bar{y}(x) \tag{3.75}$$

والتي تحقق المعادلة

$$\bar{D}_*^{\alpha}\bar{z}(x) = \bar{f}\left(x, \bar{y}_*(x)\right) - \bar{f}\left(x, \bar{y}_*(x) - \bar{z}(x)\right) \tag{3.76}$$

من الواضح أن الدالة $\left(\bar{f}_*(x, \bar{z})\right)$ تتلاشى عندما $\bar{z}(x) = \bar{0}$ ، لذا فإن $\bar{z} = \bar{0}$ يمثل حلا شاذا للمعادلة (3.76) .

وهكذا فإن حل المعادلة (3.47) $\bar{y}_*$ يكون مستقرا إذا وفقط إذا كان الحل الشاذ للمعادلة (3.76) $\bar{z} = 0$ مستقرا.

الفصل الرابع

الإستنتاجات والتوصيات

البند الأول : الاستنتاجات

لقد توصلت هذه الدراسة إلى الاستنتاجات التالية :

١- تم اعطاء صيغ لحلول بعض المعادلات التفاضلية الكسرية الخطية ذات المعاملات الثابتة بالاعتماد على دالة (Mittag-leffler) .

٢- تمت الإستفادة من الصيغ الناتجة في إعطاء صيغ تقريبية لبعض المعادلات التفاضلية الكسرية الخطية ذات المعاملات المتغيرة .

٣- تمت دراسة سلوك الصيغ الناتجة في (١)، عن طريق مقارنتها بسلوك دالة (Mittag-leffer) .

٤- تمت دراسة استقرارية بعض المعادلات التفاضلية الكسرية الخطية ذات المعاملات المتغيرة ومعادلات غير خطية عن طريق تقريبها إلى معادلات خطية ذات معاملات ثابتة ومقارنة سلوكها مع السلوك الناتج في (٣) .

البند الثاني: التوصيات

من الممكن الاستمرار في مضمار هذه الدراسة من خلال المواضيع التالية :

١- دراسة سلوك دالة Mittag-leffer عندما β, α أعداد معقدة .

٢- دراسة صيغ حلول المعادلات التفاضلية الخطية المتجانسة ذات المعاملات المتغيرة .

٣- تطوير طرق أخرى لدراسة استقرارية المعادلات التفاضلية غير الخطية كالطرق المباشرة (باستخدام دالة لايبنوف) بالإعتماد على التفاضل الكسري الاتجاهي .

٤- دراسةالمؤثرات التفاضلية الكسرية الاتجاهية ونظم المعادلات الناتجة عنها.

٥- دراسة أنواع النقاط الشاذة ، والدارات الغائية الناتجة عن نظم المعادلات التفاضلية الكسرية.

٦- دراسة الحلول الدورية تقريبا للمعادلات التفاضلية الكسرية مع تذبذبها .

References

1) Al-Shamani,J.G: Some theorems on existence and stability for differential equations of non –integer order through fixed point in the large , M.sc.Thesis, Mosul university . Iraq (1979).
2)Barrett , J.H. : Differential equations of non – integer order , Canad .J . Math.6 ,529- 271 (1954)
3)Bassam, M.:Some existence theorems on differential equations of generalized order, Eurdie Reive and Aynewardte Mathematic, (1965).
4) Bellman , R : Stability theory of differential equations , McGraw-Hill book com . (1953).
5) Berkowitz,B.,J.Klafter,R. Metzler, and H. Scher : Physical pictures of transport in heterogeneous media: Advection-dispersion, random-walk, and fractional derivative formulations. Water. Resour. Res. 38,1191-1203(2002).
6) Caputo, M. :Linear models of dissipation whose Q is almost frequency independent, II, Geophys. J. Royal Astronom. Soc., 13, 529-239,(1967).
7) Coddington, E., N. Levinson: Theory of ordinary differential equations, McGraw-Hill Book com. New York,(1955).
8) Diethelm K.,N. Ford: Numerical of linear and non-linear fractional differential equations involving fractional derivatives of several orders, Numerical Analysis Report No.379 (2001).
9) Diethelm ,K.,N. Ford: Multi-order fractional differential equations ad their numerical solution, Appl.Math.& Comput.(2003).
10) Gorenflo,R. and F.Mainardi : Fractional oscillations and Mittag-Leffler functions, Free University of Berlin, Berlin, Preprint No. A-14/96 , (1994).
11) Gorenflo,R.,J. Loutchko & Y. Luchko :Computation of the Mittag Leffler function $E_{\alpha,\beta}(z)$ and its derivative.[2001]

12) Hartley, T., C. Lorenzo: The vector linear fractional initialization problem, NASA/TP-208919,(1999).
13) Loverro,A.: Fractional calculus: History, definitions and applications for the engineer, Notre Dame,IN 46556,USA,(2004).
14) Maindari, F. : Fractionals calculus :some basic problems in continuum and stastical machanics, In . [5],291-238 (1997).
15) Meerschaert, M.,J.Mortensen and H. Scheffler: Vector Grunwald formula for fractional derivatives. Fract. Calc. Appl. Anal. 7,61-81(2004).

16) Meerschaert, M.,J.Mortensen,S.Wheatcraft: Fractional vector calculus for fractional advection-dispersion,physica A: Statistical and theoretical physics(2005 a).
17) Meerschaert, M :Vector fractional calculus, Massey university , Palmerston North (2005 b).
18) Meerschaert, M.,C. Tadjeran: Finite difference approximations for fractional advection-dispersion flow equations, J. Comput. Phys. 211, No. 1, 249-261(2006).
19) Nikolsky , S.M. : ACourse of Mathematical Analysis , vol .1, MIR publishers , Moscow (1985).
20) Oldham,K.,J. Spanier: The fractional Calculus , Acadimic press ,New York & London (1974)
21) Scalas, E., R. Gorenflo and F. Mainardi: Fractional calculus and continuous time finance.Phys. A284,376-384,(2000).
21) Struble, R.: Nonlinear differential equations, Mc.Graw-Hill book com. (1974).
16) مرجان، صباح محمود: في نظرية المعادلات التفاضلية الخطية الكسرية وتطبيقاتها، رسالة ماجستير، جامعة الموصل، العراق، (1989) .

Abstract

In this thesis , we study some forms of the solution for linear homogeneous and non-homogeneous fractional differential equations with constant coefficients, also we give a form for the solution of the system of linear fractional differential equations with constant coefficients.

Furthermore this thesis study the behavior of the solutions of linear fractional differential equations with constant coefficients according to the forms which we conclude , and consider also the stability of certain types of linear fractional differential equations with variable coefficients as well as the non-linear fractional differential equations after approximate them to a linear fractional differential equations with constant coefficients.

Studying of the forms and stability of the solutions for certain fractional differential equations

A thesis presented by

Suhaib Talal Al-Ramadani

to

The College of Education, University of Mosul

As partial Fulfillment of the requirements for the Master Degree of science in

Mathematics

Supervised by
(Assist.prof.)

Dr.Joseph G. Abdul-Ahhed

2006 A 1427 H